Midtveiseksamen i MET1180[1] - Matematikk for siviløkonomer

12. desember 2018

Oppgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Rett svar	C	D	A	C	B	A	A	B	D	C	B	D	C	B	A

Oppgave 1

Polynomdivisjon gir

$$\begin{array}{l} \big(\quad 3x^2 - 13x + 19\big) : \big(x-2\big) = 3x - 7 + \dfrac{5}{x-2} \\ \underline{-3x^2 \quad +6x} \\ \qquad\quad -7x + 19 \\ \qquad\quad \underline{\;\; 7x - 14} \\ \qquad\qquad\qquad 5 \end{array}$$

så resten er 5 (C)

Oppgave 2

Vi leser av $f(3) = 0$. Stigningstallet til tangenten er klart negativ for $x = 3$. $f(x)$ har et lokalt maksimumspunkt for $x = 5$ så her endrer $f'(x)$ fortegn fra $+$ til $-$. Altså er de tre første påstandene sanne og $f'(2) > f'(5)$ (D) er ikke sant (noe vi også kan observere ved å anslå stigningstallene til tangentene for $x = 2$ og $x = 5$).

Oppgave 3

Fordi $(2^{\frac{1}{12}})^{12} = 2^{\frac{1}{12}\cdot 12} = 2$ og 2 er vekstfaktoren for alle 12 årene, er $2^{\frac{1}{12}}$ (A) den årlige vekstfaktoren.

Oppgave 4

Symmetrilinjen er gitt ved $x = 4$ og minimum er $f(4) = 1$. Dermed er $f(x) = a(x-4)^2 + 1$. For å finne a setter vi inn $f(2) = 3$ og får likningen $a(2-4)^2 + 1 = 3$, dvs $a = \frac{1}{2}$, altså $f(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 + 1 = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 9$ (C).

Oppgave 5

Siden det er 20 terminer skal det være 20 ledd i summen. Nåverdien til en betaling av 90 000 om n år er $\frac{90\,000}{1{,}04^n}$. Altså får vi

$$\frac{90\,000}{1{,}04^3} + \frac{90\,000}{1{,}04^4} + \cdots + \frac{90\,000}{1{,}04^{21}} + \frac{90\,000}{1{,}04^{22}} \qquad \text{(B)}$$

Oppgave 6

Vi kvadrerer begge sider av likningen og får $2x + 3 = x^2 + 8x + 16$, dvs $x^2 + 6x = -13$. Vi fullfører kvadratet: $(x+3)^2 = 9 - 13 = -4$. Et kvadrattall er alltid større eller lik 0, derfor har denne likningen ingen løsninger (A).

Oppgave 7

Renteformelen med årlig vekstfaktor $e^{0{,}024}$ gir kapitalen etter x år som $300\,000 \cdot e^{0{,}024x}$. Altså får vi likningen $300\,000 \cdot e^{0{,}024x} = 500\,000$, dvs $e^{0{,}024x} = \frac{5}{3}$. Setter vs og hs inn i $\ln(x)$ og får $0{,}024x = \ln(5) - \ln(3)$. Altså må pengene stå i $x = \frac{\ln 5 - \ln 3}{0{,}024} = 21{,}28$ år (A).

[1] Eksamenskoder MET11802 og MET11805

Oppgave 8

Fordi $K''(x) > 0$ finner vi kostnadsoptimum som løsningen på likningen $K'(x) = A(x)$ der $A(x) = \frac{K(x)}{x} = 0{,}01x + 15 + \frac{1600}{x}$ er enhetskostnaden og $K'(x) = 0{,}02x + 15$. Altså $0{,}02x + 15 = 0{,}01x + 15 + \frac{1600}{x}$, dvs $0{,}01x = \frac{1600}{x}$. Vi multipliserer med x (som er større enn 0) på begge sider og får $0{,}01x^2 = 1600$, dvs $x^2 = 160\,000$, dvs $x = 400$. Innsatt i $A(x)$ (eller i $K'(x)$) gir dette minimal enhetskostnad $A(400) = 0{,}01 \cdot 400 + 15 + \frac{1600}{400} = 23$ (B).

Oppgave 9

Vi beregner $f'(x) = \frac{3}{x} - 0{,}5$ og drøfter fortegnet for $x > 0$. Vi har $f'(x) = \frac{3-0{,}5x}{x}$ og fordi $x > 0$ er fortegnet til telleren avgjørende: $f'(x) > 0$ for $x \in \langle 0, 6\rangle$, $f'(6) = 0$ og $f'(x) < 0$ for $x \in \langle 6\,,\,\infty\rangle$. Altså er (A-C) sanne utsagn. Hvis vi deriverer en gang til får vi $f''(x) = -\frac{3}{x^2}$ som er negativ, spesielt er $f''(3) = -\frac{1}{3}$ og utsagn (D) er usant.

Oppgave 10

Vi beregner $D'(p) = -15e^{-0{,}2p}$ og får priselastisitetsfunksjonen $\varepsilon(p) = \frac{D'(p)\cdot p}{D(p)} = \frac{-15e^{-0{,}2p}\cdot p}{75e^{-0{,}2p}} = -0{,}2p$. Elastisk etterspørsel: $\varepsilon(p) < -1$, dvs $-0{,}2p < -1$, dvs $p > \frac{-1}{-0{,}2} = 5$ (C).

Oppgave 11

Dette er et grenseuttrykk av typen $\frac{0}{0}$ og vi kan bruke l'Hôpitals regel med $(e^x - e)' = e^x$ og $(x - \sqrt{x})' = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$:

$$a = \lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{x - \sqrt{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{e^x}{1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{e}{1 - \frac{1}{2\sqrt{1}}} = \frac{e}{\frac{1}{2}} = 2e \quad \text{(B)}$$

Oppgave 12

Siden $f''(x)$ er den deriverte til $f'(x)$, er $f''(a)$ stigningstallet til tangenten til grafen til $f'(x)$ for $x = a$ som vi kan anslå ved å se på grafen. Vi ser at $f''(x) > 0$ for x mellom 1 og 5 og altså er $f(x)$ konveks for x i intervallet $[1, 5]$ (D).

Oppgave 13

Vi har $f(1) = 0$ og $f'(x) = \frac{1}{x}$ som gir $f'(1) = 1$. Videre har vi $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ som gir $f''(1) = -1$. Altså er $P_2(x) = 0 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2$. Det gir $P_2(2) = (2-1) - \frac{1}{2}(2-1)^2 = \frac{1}{2}$ mens $f(2) = \ln(2) \approx 0{,}6931$. Avstanden fra $P_2(2)$ til $f(2)$ er derfor omtrent $0{,}6931 - 0{,}5 = 0{,}1931$ som gir (C).

Oppgave 14

Vi tenker på y som en funksjon $y(x)$ lokalt på kurven og deriverer begge sider av likningen med hensyn på x ved å bruke potensregelen, produktregelen og kjerneregelen. Da får vi

$$8x - 7y - 7xy' + 8yy' = 0$$

Vi løser likningen for y' ved å samle alle ledd med y' til venstre og alt annet til høyre: $(8y - 7x)y' = 7y - 8x$ som gir

$$y' = \frac{7y - 8x}{8y - 7x}$$

Ved å sette $x = 4$ inn i den opprinnelige likningen får vi en likning for y:

$$4 \cdot 4^2 - 7 \cdot 4y + 4y^2 = 16$$

dvs $4(y^2 - 7y) = 16 - 4 \cdot 16 = -48$. Vi fullfører kvadratet og får $4(y - \frac{7}{2})^2 = 4 \cdot (\frac{7}{2})^2 - 48 = 1$, dvs $y = \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2}$. Det er altså to punkter på kurven med x-koordinat lik 4.

$\underline{(x, y) = (4, 3)}$: Vi setter inn i uttrykket for y' og får

$$y' = \frac{7 \cdot 3 - 8 \cdot 4}{8 \cdot 3 - 7 \cdot 4} = \frac{-11}{-4} = \frac{11}{4}$$

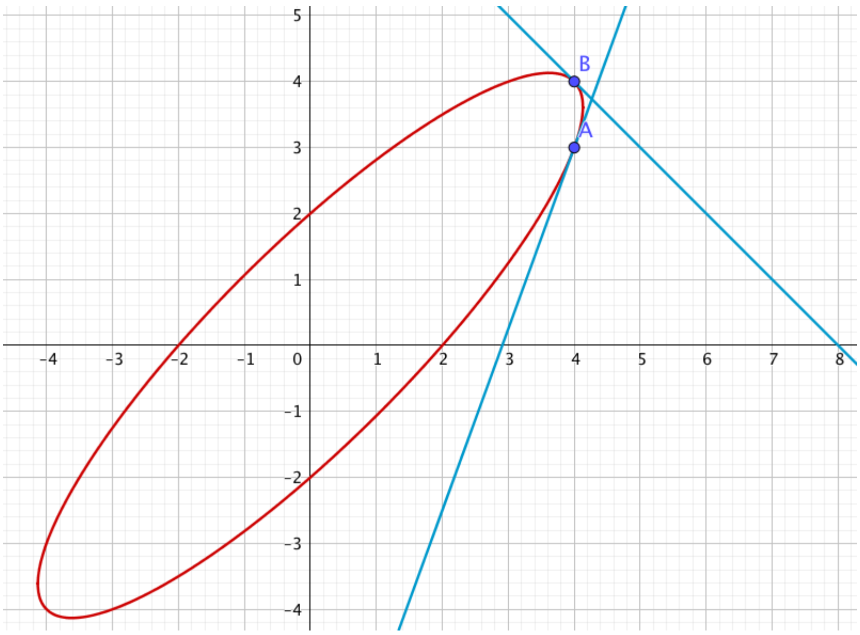
Dette er stigningstallet til tangent til kurven gjennom $(x, y) = (4, 3)$.

$\underline{(x, y) = (4, 4)}$: Vi setter inn i uttrykket for y' og får

$$y' = \frac{7 \cdot 4 - 8 \cdot 4}{8 \cdot 4 - 7 \cdot 4} = \frac{-4}{4} = -1$$

Dette er stigningstallet til tangent til kurven gjennom $(x, y) = (4, 4)$. Produktet av stigningstallene er dermed $\frac{11}{4} \cdot (-1) = -2{,}75$ (B).

Her er kurven med tangentene (som du ikke behøvde å se for deg for å kunne løse oppgaven):



Figur 1: Grafen til $f(x)$

Oppgave 15

Hvis funksjonen er strengt voksende eller strengt avtagende i hele sitt definisjonsområde har den en omvendt funksjon, ellers ikke. Vi finner derfor

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$$

og drøfter fortegnet. Vi finner at ulikheten $f'(x) < 0$ har løsning $x \in \langle 1, 3 \rangle$. Derfor er $f(x)$ strengt avtagende i intervallet $[1, 3]$, strengt voksende i intervallet $\langle -\infty, 1]$ og strengt voksende i intervallet $[3, \infty\rangle$. Dermed ser vi at alternativ (A) er eneste mulighet.