SENSORVEILEDNING - Flervalg

MET 11805
Matematikk for siviløkonomer

Institutt for Samfunnsøkonomi

Utlevering:	11.12.2019	Kl. 09:00
Innlevering:	11.12.2019	Kl. 12:00

For mer informasjon om formalia, se eksamensoppgaven.

Flervalgseksamen 1 i MET1180[1] - Matematikk for siviløkonomer

11. desember 2019

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Rett svar	B	C	C	A	A	B	D	B	D	D	A	B	D	C	A

Oppgave 1

Polynomdivisjonen

$$
\begin{array}{l}
\left(\;2x^3 \qquad -5x \;+3\right):\left(x-3\right) = 2x^2+6x+13+\dfrac{42}{x-3} \\
\underline{-2x^3+6x^2} \\
\qquad 6x^2 -5x \\
\qquad \underline{-6x^2+18x} \\
\qquad\qquad 13x +3 \\
\qquad\qquad \underline{-13x+39} \\
\qquad\qquad\qquad 42
\end{array}
$$

gir 42 til rest (B).

Oppgave 2

(A) $f'(x) = e^x$ så $f'(-1) = e^{-1} = 0{,}3679 < 0{,}37$.
(B) Ved potensregelen er $f'(x) = \left(x^{0,5}\right)' = 0.5x^{-0.5} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ så $f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = 0{,}25$.
(C) Ved brøkregelen er

$$f'(x) = \left(\frac{x-1}{2x-3}\right)' = \frac{1\cdot(2x-3)-(x-1)\cdot 2}{(2x-3)^2} = \frac{2x-3-2x+2}{(2x-3)^2} = -\frac{1}{(2x-3)^2}$$

så $f'(1) = -1$ (og ikke -5).
(D) Ved produktregelen er $f'(x) = (x\ln(x))' = \ln(x)+1$ så $f'(1) = 1$.
Altså er (C) gal.

Oppgave 3

Fordi $e^{0,1x}$ er positiv for all x kan vi dividere begge sider av likningen med $e^{0,1x}$ og få den ekvivalente likningen $x^2 - 9 = 0$ som gir $x = \pm 3$. (C) er korrekt.

Oppgave 4

Funksjonen $f(x)$ har per definisjon stasjonære punkter for de x slik at $f'(x) = 0$, dvs der tangenten til grafen til $f(x)$ er horisontal. Det er 4 slike punkter på denne grafen. Altså er (A) gal.

Oppgave 5

Fordi $f(x)$ er kontinuerlig på det lukkede intervallet har $f(x)$ minst et globalt maksimumspunkt og et globalt minimumspunkt. Ekstremalpunktene til $f(x)$ er enten stasjonære punkter eller endepunkter (det er ingen knekkpunkter). Vi har $f'(x) = -3x^2 + 12x - 9$. Dette er en konkav annengradsfunksjon som har nullpunktene $x = 1$, $x = 3$ som er henholdsvis et lokalt minimumspunkt og et lokalt maksimumspunkt (vi kan også bruke andrederiverttesten: $f''(1) = 6 > 0$, $f''(3) = -6 < 0$). Beregner $f(0) = 10$, $f(1) = 6$, $f(3) = 10$ og $f(4) = 6$. $f(x)$ har altså to lokale minimumspunkter $x = 1$ og $x = 4$, dvs (A).

[1] Eksamenskode MET11805

Oppgave 6

Terminrenten er 3,6% : 12 = 0,003. Avdragsfrihet i 4 år er 48 terminer så nåverdien av første betaling er $\frac{12\,000}{1{,}003^{48}}$. Avdrag i 30 år gir 360 terminer. Nåverdien av siste betaling er dermed $\dfrac{12\,000}{1{,}003^{407}}$. Dette gir (B).

Oppgave 7

Nåverdien til betalingstrømmen skal være 0. Det gir likningen $-30 + \frac{50}{e^{4r}} = 0$, dvs $\frac{50}{e^{4r}} = 30$, dvs $e^{4r} = \frac{5}{3}$. Så setter vi venstresiden og høyresiden inn i den strengt voksende funksjonen $\ln(x)$ og får den ekvivalente likningen $4r = \ln(\frac{5}{3}) = \ln(5) - \ln(3)$, dvs $r = \frac{\ln(5)-\ln(3)}{4}$ som er (D).

Oppgave 8

For at $\ln(x-1)$ skal være definert må $x > 1$. Vi setter venstresiden og høyresiden inn i den strengt voksende e^x-funksjonen. Dette gir den ekvivalent ulikheten $x - 1 \leqslant e^2$ med betingelsen $x > 1$. Løsningen blir $x \in \langle 1\,,\, 1+e^2]$ som er (B).

Oppgave 9

Fra grafen ser vi at symmetriaksen til parabelen er $x = 9$ og maksimumsverdien er 20. Dermed er $f(x) = a(x-9)^2 + 20$ for et ubestemt tall a. Vi ser også at $f(14) = 15$, dvs $a \cdot 5^2 + 20 = 15$, dvs $a = -0{,}2$. Dermed er $f(x) = -0{,}2(x-9)^2 + 20$ og $f(0) = -0{,}2(-9)^2 + 20 = 3{,}8$ som gir (D).

Oppgave 10

Vi regner grenseverdiene ved å bruke l'Hôpitals regel.

(A) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{3x-7} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \frac{2}{3}$.

(B) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(3x^2+1)}{x} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{6x}{3x^2+1}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{3x^2+1} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{6}{6x} = 0.$

(C) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x+1} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$

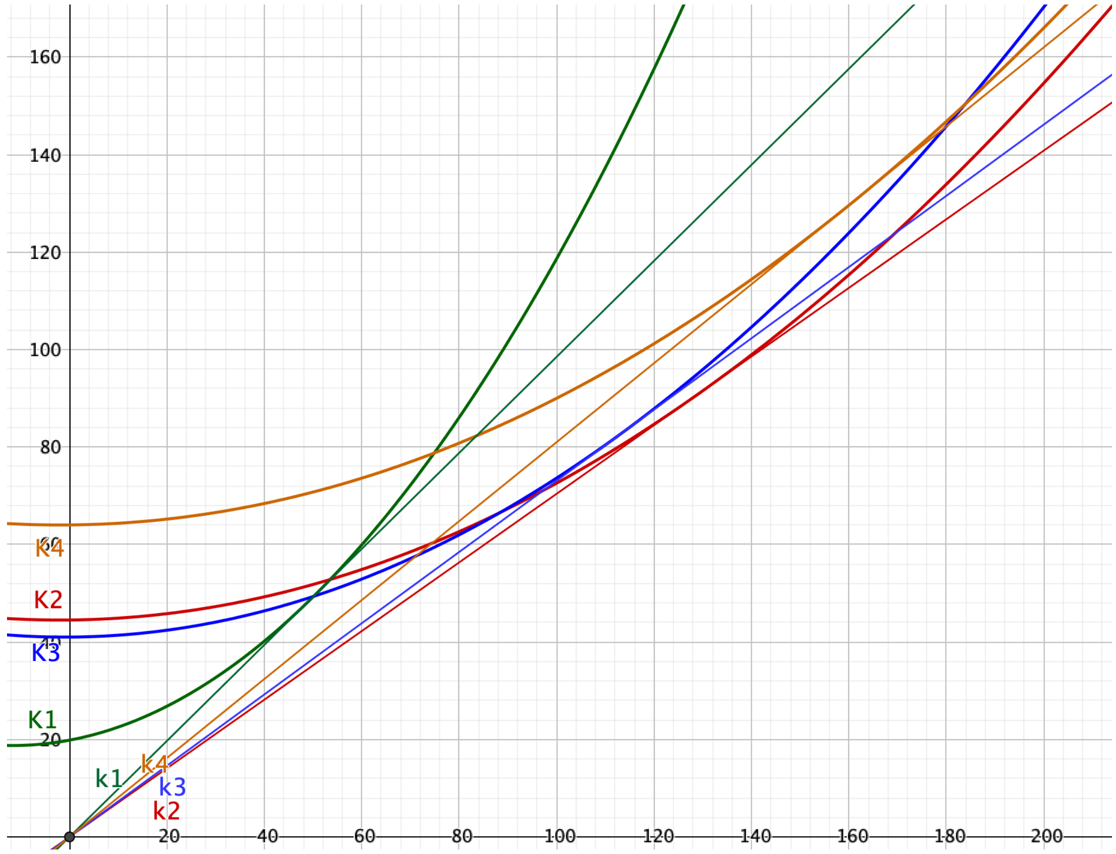
(D) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(1-3x)(4x+1)}{(2x-7)(1-2x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-12x^2+x+1}{-4x^2+16x-7} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-24x+1}{-8x+16} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \frac{-24}{-8} = 3$ som er eneste svar som ligger i intervallet $[2\,,\,5]$.

Oppgave 11

Vi beregner $D'(p) = -3$ og elastisitetsfunksjonen blir dermed $\varepsilon(p) = \frac{-3p}{60-3p}$. Etterspørselen er elastisk med hensyn på prisen hvis $\varepsilon(p) < -1$. Det gir den ekvivalente ulikheten $\frac{60-6p}{60-3p} < 0$. Fordi $60 - 3p$ er positiv for all p i intervallet $\langle 0\,,\,20\rangle$ er det fortegnet til telleren som avgjør fortegnet til brøken. Vi får $60 - 6p < 0$ som er sant for alle p i intervallet $\langle 10\,,\,20\rangle$. Dvs (A).

Oppgave 12

I figur 1 ser vi de tangentene (k_1–k_4) til grafene K_1–K_4 som går gjennom origo. Stigningstallet til tangenten gir optimal enhetskostnad. Vi ser at k_2 (den røde) har lavest stigningstall. Dette gir (B).



Figur 1: Fire kostnadsfunksjoner (K_1–K_4) med tangenter (k_1–k_4)

Oppgave 13

Vi vil finne standardformen for likningen til ellipsen. Vi samler ledd med x eller y på venstresiden: $16x^2 - 96x + 9y^2 - 72y = -144$. Vi vil fullføre kvadratene og faktoriserer derfor ut 16 og 9: $16[x^2 - 6x] + 9[y^2 - 8y] = -144$. Nå kan vi fullføre kvadrater inne i parantesene: $16[(x-3)^2 - 9] + 9[(y-4)^2 - 16] = -144$. Så multipliserer vi inn igjen i de ytre parantesene: $16(x-3)^2 - 144 + 9(y-4)^2 - 144 = -144$, dvs $16(x-3)^2 + 9(y-4)^2 = 144$. Så deler vi begge sider med 144 og får standardformen

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{16} = 144$$

Ellipsen har derfor sentrum $(3\,,4)$ og halvakser 3 og 4. Dette passer bare med (D).

Oppgave 14

(A) $f'(x)$ har et minimumspunkt for $x \approx 2{,}65$ og et maksimumspunkt for $x \approx 4{,}35$. Dette er de eneste punktene hvor $f''(x)$ skifter fortegn og det er da de eneste infleksjonspunktene til $f(x)$.

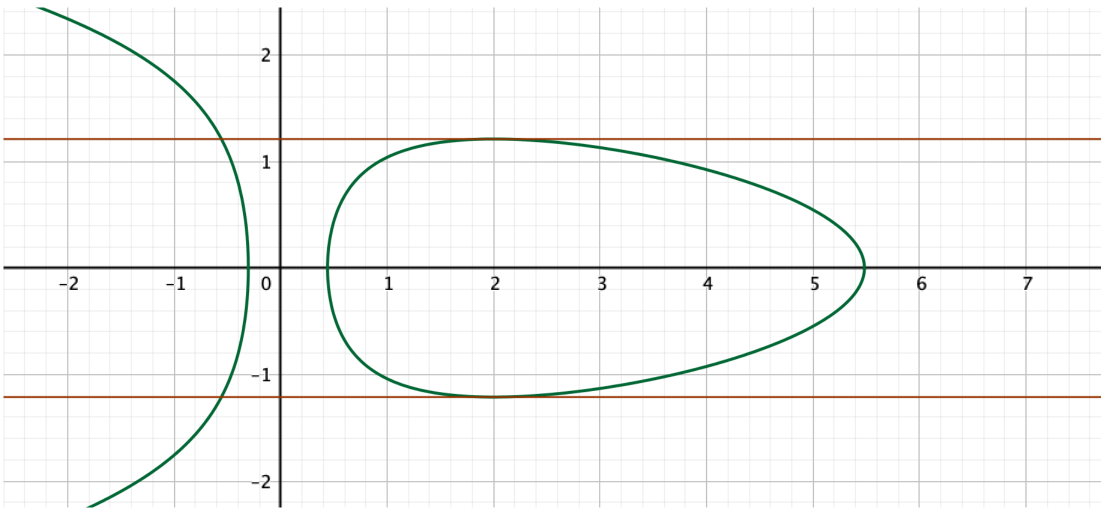
(B) Fra grafen ser vi at stigningstallet til tangenten til $f'(x)$ (altså $f''(x)$) er voksende fra $x = 3$ til $x \approx 3{,}5$ og avtagende fra $x \approx 3{,}5$ til $x = 4$.

(C) Fordi $f'(x)$ er negativ for x i intervallet $\langle 2, 3\rangle$ er $f(x)$ strengt avtagende på intervallet $[2, 3]$ og dermed er $f(2) > f(3)$ rett.

(D) $f(x)$ er konkav der $f''(x)$ er mindre eller lik 0, men på grafen ser vi at stigningstallet til tangenten til $f'(x)$ er positivt fra $x = 4$ til $x \approx 4{,}35$.

Oppgave 15

Vi kaller likningen $e^{y^2+x} = 8x^2$ for $(*)$. Vi deriverer begge sider av $(*)$ for å få en likning som inneholder y'. Ved å bruke kjerneregelen to ganger får vi $(2yy'+1)e^{y^2+x} = 16x$. Denne vil vi løse for y'. Vi substituerer $e^{y^2+x} = 8x^2$ og får $(2yy'+1)\cdot 8x^2 = 16x$. Ved å dividere med $8x^2$ på begge sider (ok fordi $x = 0$ ikke gir noen løsning på $(*)$) får vi $2yy'+1 = \frac{2}{x}$, dvs $2yy' = \frac{2-x}{x}$ som gir $y' = \frac{2-x}{2xy}$. Vi har altså at $x = 2$ gir $y' = 0$. Her bruker vi at de tilsvarende y-verdiene er forskjellige fra 0. De finner vi ved å løse $(*)$ innsatt $x = 2$, dvs $e^{y^2+2} = 32$. Ved å sette venstresiden og høyresiden inn i $\ln(x)$ får vi likningen $y^2 + 2 = \ln(32)$, dvs $y^2 = \ln(32) - 2$. Fordi $\ln(32) - 2 > 0$ har denne likningen akkurat to løsninger for y (og ingen av dem er 0). Dette gir (A).



Figur 2: Den implisitte kurven (grønn) med tangentene (brune) for $x = 2$