

# Hjemmeeksamen i MET1180<sup>1</sup> - Matematikk for siviløkonomer

10. desember 2020

LØSNINGSFORSLAG

## Oppgave 1

$$\begin{array}{r} (6x^3 + 23x^2 + 19x + 14) : (x + 3) = 6x^2 + 5x + 4 + \frac{2}{x + 3} \\ \underline{-6x^3 - 18x^2} \phantom{+ 19x + 14} \\ 5x^2 + 19x \phantom{+ 14} \\ \underline{-5x^2 - 15x} \phantom{+ 14} \\ 4x + 14 \\ \underline{-4x - 12} \\ 2 \end{array}$$

Resten er altså 2.

## Oppgave 2

Hvis  $r$  er internrenten er nåverdien av kontantstrømmen  $-25 + \frac{50}{e^{5r}} = 0$ . Det gir likningen  $e^{5r} = \frac{50}{25} = 2$ , dvs  $r = \frac{\ln 2}{5} = \underline{\underline{13,86\%}}$ .

## Oppgave 3

Ved kjerneregelen med  $u(p) = -0,2p$  får vi  $D'(p) = -0,2 \cdot D(p)$  og dermed at elastisitetsfunksjonen er

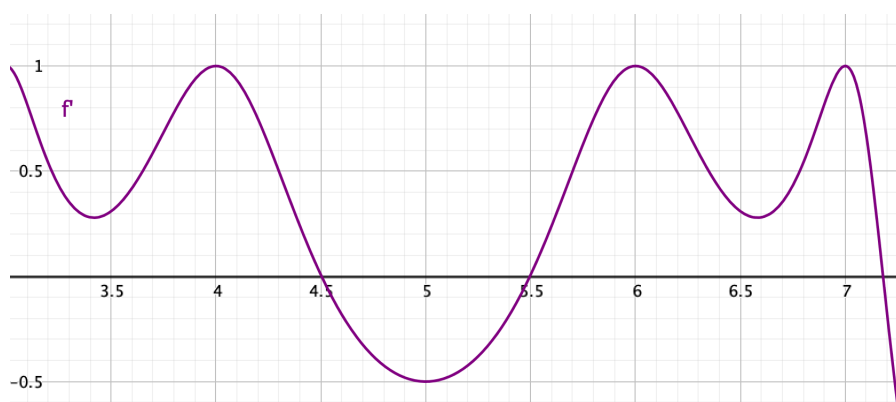
$$\varepsilon(p) = \frac{D'(p) \cdot p}{D(p)} = \frac{-0,2 \cdot D(p) \cdot p}{D(p)} = -0,2p$$

Etterspørselen er *elastisk* for de priser  $p$  slik at  $\varepsilon(p) < -1$ , dvs  $-0,2p < -1$ , dvs  $p > 5$ .

Etterspørselen er *uelastisk* for de priser  $p$  slik at  $\varepsilon(p) > -1$ , dvs  $0 < p < 5$ .

Etterspørselen er *nøytralelastisk* for prisen  $p$  slik at  $\varepsilon(p) = -1$ , dvs  $p = 5$ .

## Oppgave 4



Figur 1: Grafen til  $f'(x)$

<sup>1</sup>Eksamenskoden MET11805

- (A)  $f(x)$  har tre stasjonære punkter er riktig fordi et nullpunkt for  $f'(x)$  er et stasjonært punkt for  $f(x)$  og vi teller tre nullpunkter for  $f'(x)$ .
- (B)  $f(x)$  er konveks i intervallet  $[5, 6]$  er riktig fordi  $f(x)$  er konveks for de  $x$  slik at  $f''(x) \geq 0$  som stemmer fordi vi ser at stigningstallet til tangenten til grafen til  $f'(x)$ , dvs  $f''(x)$ , er større eller lik 0 i intervallet.
- (C)  $f(x)$  er konveks i intervallet  $[4,5, 5,5]$  er ikke riktig fordi stigningstallet til tangenten til grafen til  $f'(x)$ , dvs  $f''(x)$ , er negativ for  $x$  mellom 4,5 og 5.
- (D)  $f(x)$  er voksende i intervallet  $[6, 7]$  er riktig fordi  $f'(x)$  er positiv for alle  $x$  i intervallet.

### Oppgave 5

Hvis et produkt av tre tall er lik 0 må minst en av faktorene være 0. Dvs  $x^2 - 5 = 0$  som gir  $x = \pm\sqrt{5}$  eller  $e^x - 2 = 0$  som gir  $x = \ln(2)$ , eller  $\ln(x) = 0$  som gir  $x = e^0 = 1$ . Men  $\ln(x)$  er bare definert for positive  $x$  og det samme gjelder derfor likningen. Dermed er  $x$  enten lik  $\sqrt{5}$ ,  $\ln(2)$ , eller 1.

### Oppgave 6

Hvis du hver måned i 10 år betaler 5000 inn på en konto med 0,2% månedsrente (dvs 2,4% nominell rente og månedlig forrentning) med første innbetaling i dag så vil summen representere fremtidsverdien til kontantstrømmen (dvs saldo) om 10 år. Den månedlige vekstfaktoren er  $1 + 0,2\% = 1,002$  og  $5000 \cdot 1,002^n$  representerer fremtidsverdien til innbetaling nr.  $(121 - n)$ .

### Oppgave 7

For å finne funksjonsuttrykket  $g(x)$  løser vi først likningen  $y = \ln(x - 1)$  for  $x$ . For å få  $x - 1$  «ut» av  $\ln$  setter vi venstre og høyre side av likningen inn i  $e^{(-)}$ . Det gir  $e^y = e^{\ln(x-1)} = x - 1$ , dvs  $x = e^y + 1$ . Så bytter vi variabler og får  $g(x) = e^x + 1$ .

Fordi  $f(x) = \ln(x - 1)$  er (strengt) voksende vil den minste verdien være  $f(2) = \ln(1) = 0$ . Fordi  $f(x)$  vokser uten øvre begrensning ( $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x - 1) = \infty$ ) og er kontinuerlig vil  $V_f = [0, \infty)$ . (Alternativt argument: likningen  $f(x) = c$  har løsninger for  $x$  i intervallet  $D_f = [2, \infty)$  for alle  $c \geq 0$ , nemlig  $x = e^c + 1$ ). Generelt gjelder  $D_g = V_f$ . Derfor er  $D_g = [0, \infty)$ .

### Oppgave 8

Hyperbelfunksjonen kan skrives på standardformen  $f(x) = c + \frac{a}{x-b}$  hvor  $b = 5$  og  $c = 100$ , dvs  $f(x) = 100 + \frac{a}{x-5}$ . Fra  $f(6) = 112$  får vi derfor likningen  $100 + \frac{a}{6-5} = 112$ , dvs  $a = 12$  og  $f(x) = 100 + \frac{12}{x-5}$ . Dermed får vi  $f(17) = 100 + \frac{12}{17-5} = \underline{101}$ .

### Oppgave 9

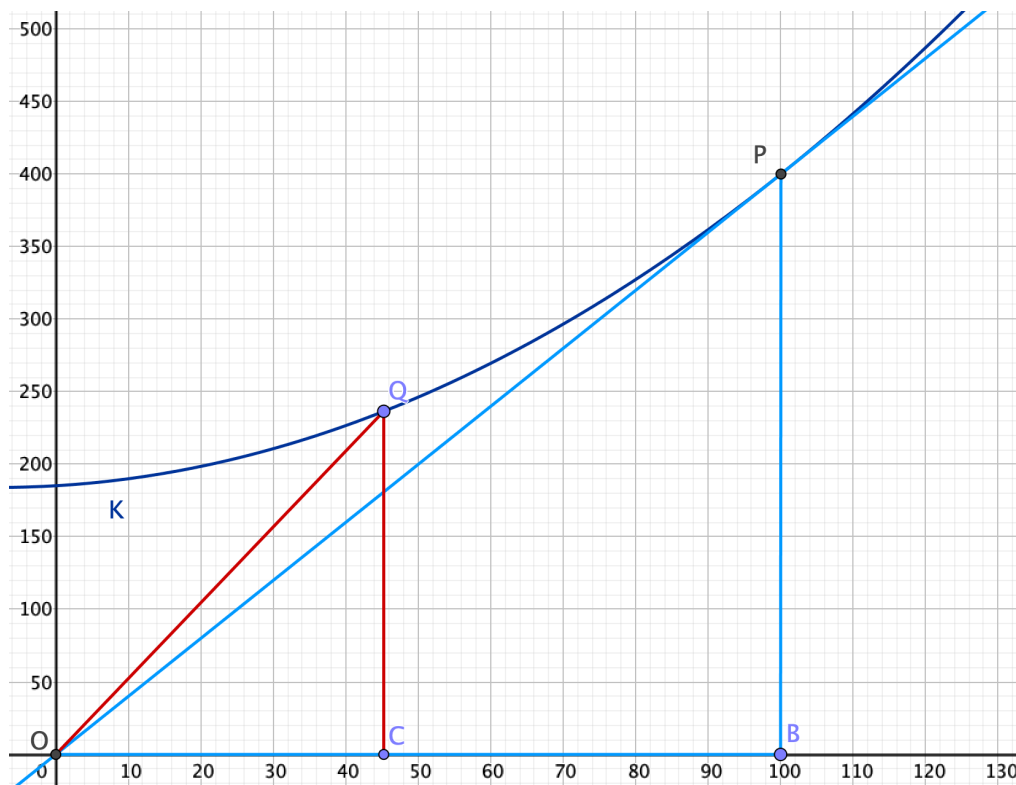
Kjerneregelen for derivasjon av sammensatte funksjoner sier at  $f'(x) = g'(u(x)) \cdot u'(x)$ . Dvs at  $f'(12) = g'(u(12)) \cdot u'(12) = g'(52) \cdot u'(12) = 32 \cdot (-0,1) = \underline{-3,2}$ .

### Oppgave 10

Taylorpolynomet av andre grad til  $f(x)$  i 30 er  $P_2(x) = 700 + 5(x - 30) - 0,5(x - 30)^2$ . Dermed er  $f(31) \approx P_2(31) = \underline{704,5}$ .

### Oppgave 11

I figur 2 ser du grafen til kostnadsfunksjonen med tangenten gjennom origo og et ikke-optimalt punkt Q.



Figur 2: Kostnadsfunksjonen  $K(x)$

Når kostnadsfunksjonen er strengt konveks ( $K''(x) > 0$ ) slik som her, vil den tangenten til kostnadsfunksjonen som går gjennom origo ha minimal enhetskostnad som stigningstall og  $x$ -koordinaten til tangeringspunktet vil være kostnadsoptimum. Vi ser at punktet  $P = (100, 400)$  tilnærmet er dette tangeringspunktet, derfor er minimal enhetskostnad lik  $\frac{400}{100} = \underline{4}$  og kostnadsoptimum er gitt ved  $x = 100$ .

Ved et resultat i kurset er kostnadsoptimum løsningen på likningen  $K'(x) = A(x)$  hvor  $A(x) = \frac{K(x)}{x}$  er gjennomsnittlig enhetskostnad for  $x$  produserte enheter. Tangentmetoden for å finne minimal enhetskostnad fungerer dermed fordi stigningstallet til tangenten som går gjennom origo både er  $K'(100)$  og  $\frac{K(100)}{100} = A(100)$ . Vi ser også at linjen gjennom origo og et annet punkt Q på grafen til  $K(x)$  har høyere stigningstall. Dermed er  $x = 100$  kostnadsoptimum.

### Oppgave 12

Standardformen for ellipselikningen gir

$$\frac{(x - 3)^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{(y - 4)^2}{(\sqrt{6})^2} = 1$$

Ved å multiplisere begge sider av likningen med  $(\sqrt{3})^2 \cdot (\sqrt{6})^2 = 3 \cdot 6 = 18$  får vi likningen

$$6(x - 3)^2 + 3(y - 4)^2 = 18 \quad \text{dvs} \quad 6x^2 - 36x + 54 + 3y^2 - 24y + 48 = 18$$

Vi deriverer begge sider av likningen med hensyn på  $x$  og får (ved bl.a. kjerneregelen)

$$12x - 36 + 6yy' - 24y' = 0$$

som vi løser for  $y'$  og får  $6(y - 4)y' = 12(3 - x)$ , dvs

$$y' = \frac{12(3 - x)}{6(y - 4)} = \frac{2(3 - x)}{(y - 4)}$$

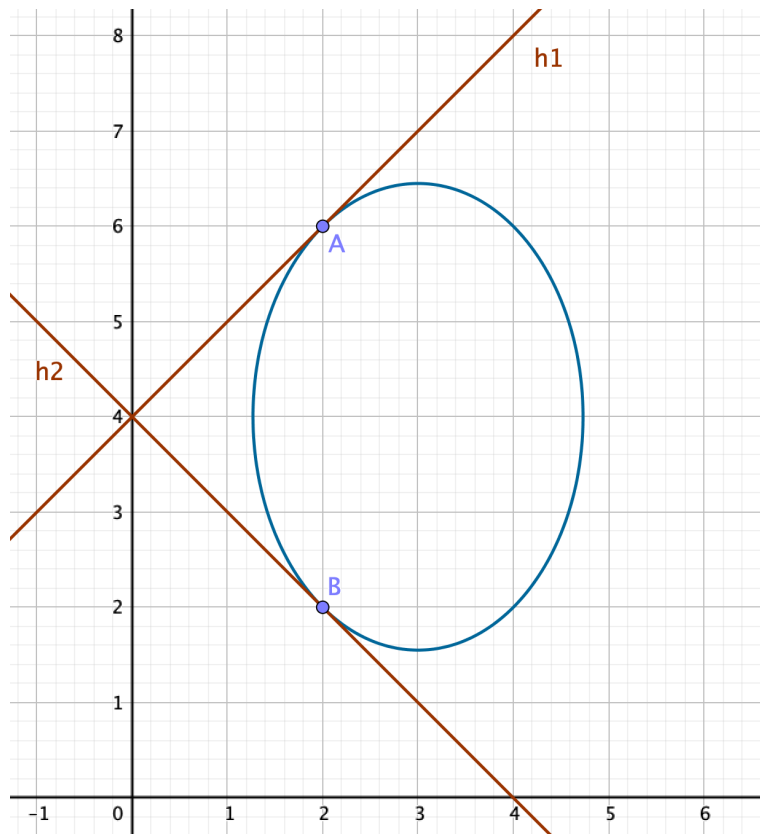
Når  $x = 2$  får vi fra ellipselikningen at  $\frac{(2-3)^2}{3} + \frac{(y-4)^2}{6} = 1$ , dvs  $(y - 4)^2 = 6(1 - \frac{1}{3}) = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$ .  
 Dermed er  $y = 4 \pm 2$ , dvs  $y = 6$  eller  $y = 2$ .

For punktet  $(2, 6)$  har vi stigningstallet  $y' = \frac{2(3-2)}{(6-4)} = 1$  for tangentfunksjonen  $h_1(x)$ .  
 Ettpunktspunktformelen gir da at

$$h_1(x) - 6 = 1 \cdot (x - 2) \quad \text{dvs} \quad \underline{\underline{h_1(x) = x + 4}}$$

For punktet  $(2, 2)$  har vi at stigningstallet  $y' = \frac{2(3-2)}{(2-4)} = -1$  for tangentfunksjonen  $h_2(x)$ .  
 Ettpunktspunktformelen gir da at

$$h_2(x) - 2 = (-1) \cdot (x - 2) \quad \text{dvs} \quad \underline{\underline{h_2(x) = -x + 4}}$$



Figur 3: Ellipsen med to de tangentene for  $x = 2$