Flervalgseksamen 1 i MET1180[1] - Matematikk for siviløkonomer

10. desember 2021

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Rett svar	C	B	D	C	B	D	B	A	A	A	C	B	C	D	A

Oppgave 1

Vi har $K(0) = 1600 > 0$, $K'(x) = 2x + 20 > 0$ for $x > 0$ og $K''(x) = 2 > 0$ for alle x. Dermed er kostnadsoptimum løsningen på likningen $K'(x) = \frac{K(x)}{x}$. Multipliserer på begge sider med x og får $2x^2 + 20x = x^2 + 20x + 1600$, dvs $x^2 = 1600$, dvs $\underline{x = 40}$ (fordi $x > 0$). Dette er ikke blant svaralternativene så vi beregner optimal enhetskostnad $K'(40) = 2 \cdot 40 + 20 = \underline{100}$.

Rett svar er C.

Oppgave 2

Første innskudd skal stå på kontoen i $18 \cdot 12 = 216$ renteterminer med terminrente $\frac{3{,}6\%}{12} = 0{,}003$ som gir sluttverdi 18 år fra nå som $5000 \cdot 1{,}003^{216}$. Andre innskudd står på kontoen i 215 terminer og gir sluttverdien $5000 \cdot 1{,}003^{215}$, osv til siste innskudd som står på konto i $3 \cdot 12 + 1 = 37$ måneder som gir sluttverdi $5000 \cdot 1{,}003^{37}$. Summen av disse fremtidsverdiene gir saldo om 18 år.

Rett svar er B.

Oppgave 3

(A) $f'(x) = \frac{1}{x}$ så $f'(0{,}5) = \frac{1}{0{,}5} = 2$

(B) $f'(x) = \frac{1\cdot(1-x)-x(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$ så likningen $f'(x) = 0$ har ingen løsninger.

(C) $f'(x) = e^x + xe^x$ så $f'(-1) = e^{-1} + (-1)e^{-1} = 0$

(D) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ så er $f'(0{,}25) = \frac{1}{2\sqrt{0{,}25}} = \frac{1}{2\cdot 0{,}5} = 1$.

Rett svar er D.

Oppgave 4

Grafen til hyperbelfunksjonen er symmetrisk om skjæringspunktet $(30\,,80)$ til asymptotene. Siden 40 er 10 mer enn 30 og 20 er 10 mindre, vil punktene $(40\,,f(40))$ og $(20\,,90)$ ligge på hver sin side like langt fra symmetripunktet $(30\,,80)$, dvs $f(40) = 70$. Alternativt kan vi finne uttrykket $f(x) = 80 - \frac{100}{x-30}$ og beregne $f(40) = 70$.

Rett svar er C.

Oppgave 5

Nåverdien av kontantstrømmen er

$$\frac{12}{1{,}15^3} + \frac{21}{1{,}15^4} + \frac{26}{1{,}15^5} = 32{,}82$$

Dette må også være K for at internrenten skal være 15%.

Rett svar er B.

[1] Eksamenskode MET11805

Oppgave 6

(A) Vi leser av grafen at $f(2) \approx 2{,}1$ mens $f(5{,}5) \approx 1{,}85$ så $f(2) > f(5{,}5)$.
(B) Vi anslår tangentenes stigningstall til $f'(2) \approx -0{,}8$ og $f'(5) \approx -1{,}75$ så $f'(2) > f'(5)$.
(C) Vi ser på grafen at $f(x)$ er konkav i intervallet $[4\,,5]$ og $f'(x)$ er derfor avtagende i intervallet $[4\,,5]$.
(D) Det ser ut til at $f(x)$ har et vendepunkt omtrent ved $x = 3{,}4$. Dermed skifter $f''(x)$ fortegn i intervallet $[3\,,4]$.

Rett svar er D.

Oppgave 7

$f'(x) = e^x - 2$ og $f''(x) = e^x$. Dermed er $f''(x) > 0$ for alle x og $f(x)$ er konveks.

Rett svar er B.

Oppgave 8

Definsjonsmengden D_g til g er lik verdimengden V_f til f. Fordi $f(x)$ er avtagende i intervallet $[0\,,3]$ er maksimumsverdien $f(0) = 100 - 5^2 = 75$ mens minimumsverdien er $f(3) = 100 - 8^2 = 36$. Ved skjæringssetningen (mellomverdisetningen) oppnår den kontinuerlige funksjonen $f(x)$ alle mellomliggende verdier når x gjennomløper $D_f = [0\,,3]$. Altså er $D_g = V_f = [36\,,75]$.

Rett svar er A.

Oppgave 9

Vi trekker fra $5x$ på begge sider av ulikheten og får $xe^x - 5x \leqslant 0$. Faktoriserer ut x og får $x(e^x - 5) \leqslant 0$. Ved bruk av fortegnsskjema får vi $0 \leqslant x \leqslant \ln(5)$.

Rett svar er A.

Oppgave 10

Med n betalinger blir nåverdien

$$\frac{15\,000}{1{,}004^{240}} + \frac{15\,000}{1{,}004^{241}} + \cdots + \frac{15\,000}{1{,}004^{n+239}}$$

Hvis vi leser den geometriske rekken fra venstre mot høyre får vi summen

$$\frac{15\,000}{1{,}004^{240}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1{,}004}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{1{,}004}\right) - 1}$$

Når n vokser uten grenser vil $\left(\frac{1}{1{,}004}\right)^n = \frac{1}{1{,}004^n}$ nærme seg 0 mer og mer. Nåverdien av den regulære kontantstrømmen uten ende kan derfor tolkes som

$$\frac{15\,000}{1{,}004^{240}} \cdot \frac{-1}{\left(\frac{1}{1{,}004}\right) - 1} = \frac{15\,000}{1{,}004^{240}} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{1{,}004}\right)} = \frac{15\,000}{1{,}004^{240}} \cdot \frac{1{,}004}{0{,}004} = 1\,444\,354{,}86$$

Rett svar er A.

Oppgave 11

Ved kjerneregelen har vi $f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$ hvor $u = u(x)$. Fra tabellene får vi $u(35) = 3$, $g'(3) = 4$ og $u'(35) = 0{,}5$ som gir $f'(35) = 0{,}5 \cdot 4 = 2$.

Rett svar er C.

Oppgave 12

De stasjonære punktene til $f(x)$ er løsningene til likningen $f'(x) = 0$.

(A) $e^x - 10 = 0$ gir løsningen $x = \ln(10)$ mens $x^2 + 5 = 0$ ikke har noen løsninger.
(B) $2x - 5 = 0$ gir løsningen $x = 2{,}5$ mens $\ln(x^2 - 14x + 50) = 0$ hvis og bare hvis $x^2 - 14x + 50 = 1$, dvs $(x-7)^2 = 1 - 50 + 49 = 0$, dvs $x = 7$.
(C) $\ln(x) - 2021 = 0$ har én løsning $x = e^{2021}$.
(D) $x\ln(x) - \ln x = 0$ tilsvarer $(x-1)\ln x = 0$. Men $x - 1 = 0$ og $\ln(x) = 0$ har samme løsning $x = 1$.

Rett svar er B.

Oppgave 13

(A) $f(x)$ har vendepunkter der $f''(x)$ skifter fortegn, dvs $x \approx 3$ og $x \approx 10$ som begge ligger i intervallet $[2, 16]$.
(B) $f'(x)$ er strengt avtagende i intervallet $[8, 10]$ fordi $f''(x) < 0$ for $x \in [8, 10\rangle$ mens $f'(x)$ er strengt voksende i intervallet $[10, 16]$ fordi $f''(x) > 0$ for $x \in \langle 10, 16]$.
(C) $f'(x)$ er strengt voksende i intervallet $[14, 32]$ fordi $f''(x) > 0$ for $x \in [14, 32]$. Altså er $f'(14)$ minimumsverdien.
(D) $f(x)$ er konveks i intervallet $[18, 24]$ fordi $f''(x) > 0$ for $x \in [18, 24]$.

Rett svar er C.

Oppgave 14

(A) Med l'Hôpitals regel blir $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{e^{ax}-1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3}{ae^{ax}} = \dfrac{3}{ae^0} = \dfrac{3}{a}$ og likningen $\dfrac{3}{a} = 6$ gir $a = 0{,}5$.

(B) Med l'Hôpitals regel blir $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(ax+1)}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{a}{ax+1}}{2} = \dfrac{a}{2}$ og likningen $\dfrac{a}{2} = 5$ gir $a = 10$.

(C) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{4x-12}{\sqrt{x+1}} + ax = \dfrac{4\cdot 3 - 12}{\sqrt{3+1}} + a\cdot 3 = 3a$ og likningen $3a = 12$ gir $a = 4$.

(D) Hvis $a \neq 1$ får vi $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x) - x + 1}{x^2 - 2x + a} = \dfrac{\ln(1) - 1 + 1}{1^2 - 2\cdot 1 + a} = 0$. Men hvis $a = 1$ kan vi bruke l'Hôpitals regel to ganger: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x) - x + 1}{x^2 - 2x + 1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{x} - 1}{2x - 2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{-1}{x^2}}{2} = \dfrac{\frac{-1}{1^2}}{2} = -0{,}5$.

Rett svar er D.

Oppgave 15

Hvis $x = 7$ får vi likningen $49 - 21y + y^2 = -5$, dvs $\left(y - \frac{21}{2}\right)^2 = -5 - 49 + \left(\frac{21}{2}\right)^2 = \frac{441-216}{4} = \frac{225}{4}$. Det gir $y = \frac{21}{2} \pm \frac{15}{2}$ dvs de to punktene $(7, 3)$ og $(7, 18)$.

Vi deriverer begge sider av likningen med hensyn på x. Ved å bruke produktregelen på xy og kjerneregelen på y^2 får vi likningen $2x - 3y - 3xy' + 2yy' = 0$, dvs $(2y - 3x)y' = 3y - 2x$, dvs

$$y' = \frac{3y - 2x}{2y - 3x}$$

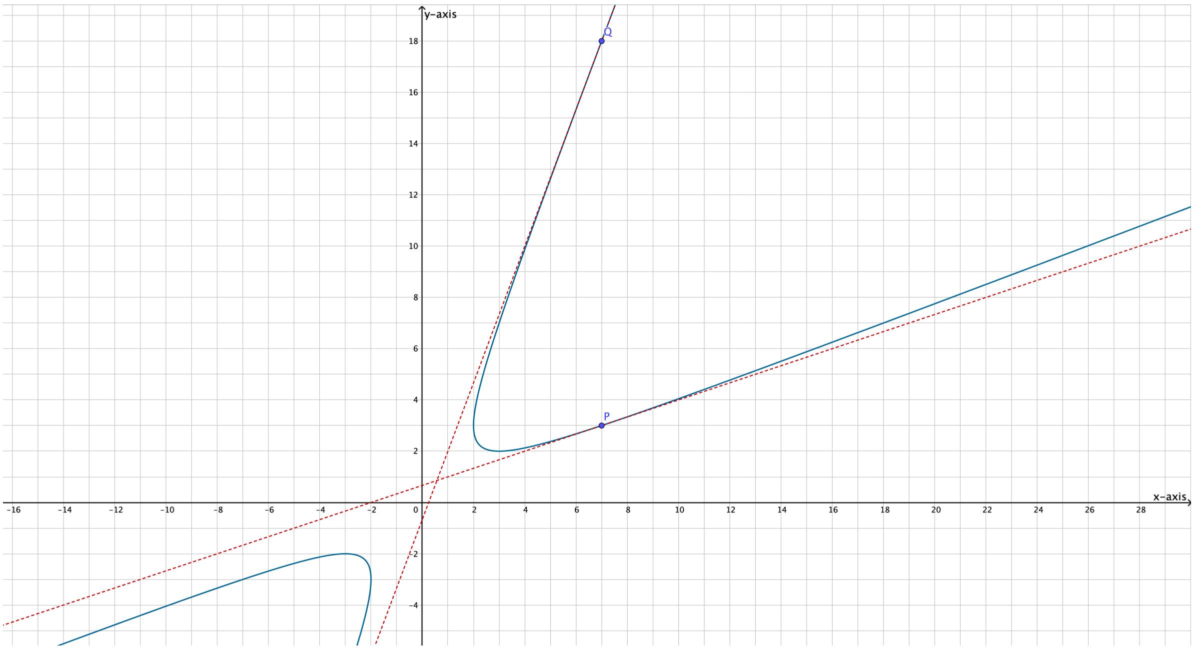
Tangenten til kurven i $(7, 3)$ har stigningstall $y' = \frac{3\cdot 3 - 2\cdot 7}{2\cdot 3 - 3\cdot 7} = \frac{-5}{-15} = \frac{1}{3}$.

Tangenten til kurven i $(7, 18)$ har stigningstall $y' = \frac{3\cdot 18 - 2\cdot 7}{2\cdot 18 - 3\cdot 7} = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}$.

Produktet av stigningstallene er $\frac{1}{3} \cdot \frac{8}{3} = \frac{8}{9}$.

Rett svar er A.

Her er kurven med de to tangentlinjene.



Figur 1: $x^2 - 3xy + y^2 = -5$ med tangentlinjer