Skoleeksamen (3t) MET11805 - Matematikk for siviløkonomer

8. des. 2022

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

i) Vi ser at sentrum i ellipsen er $\underline{\underline{(7\,,2)}}$, horisontal halvakse er $14-7=\underline{\underline{7}}$ og vertikal halvakse er $6-2=\underline{\underline{4}}$.

ii) Da blir ellipselikningen på standardform

$$\underline{\underline{\frac{(x-7)^2}{49}+\frac{(y-2)^2}{16}=1}}$$

Oppgave 2

Heltallsrøtter i $f(x)$ må være divisorer av 1. Vi finner $f(-1)=-1-3+3+1=0$ så $x+1$ er en faktor i $f(x)$. Polynomdivisjon gir

$$\begin{array}{l}
\left(\;x^3-3x^2-3x+1\right):\left(x+1\right)=x^2-4x+1 \\
\underline{-x^3\;\;-x^2} \\
\qquad\;\; -4x^2-3x \\
\qquad\;\; \underline{\;\;4x^2+4x} \\
\qquad\qquad\qquad x+1 \\
\qquad\qquad\;\; \underline{-x-1} \\
\qquad\qquad\qquad\;\; 0
\end{array}$$

Røttene i x^2-4x+1 er $2\pm\sqrt{3}$ så faktoriseringen blir $\underline{\underline{f(x)=(x+1)(x-2+\sqrt{3})(x-2-\sqrt{3})}}$.

Oppgave 3

Dette er et «$\frac{0}{0}$»-uttrykk og vi bruker derfor l'Hôpitals regel og det gjentar seg én gang:

$$\lim_{x\to 0}\frac{0{,}5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2}\overset{\text{l'Hôp}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{0{,}5-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{2x}\overset{\text{l'Hôp}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4(x+1)\sqrt{x+1}}}{2}=\underline{\underline{\frac{1}{8}}}$$

Oppgave 4

i) Månedsrenten er $3{,}6\%/12=0{,}3\%$ som gir månedlig vekstfaktor $1+0{,}3\%$. Årlig vekstfaktor er da $(1+0{,}3\%)^{12}=1{,}0366$ så effektiv rente er $\underline{\underline{3{,}66\%}}$.

ii) Hvis r er renten er nåverdien av kontantstrømmen $-15+\frac{30}{(1+r)^6}$. Hvis r er internrenten skal denne nåverdien være 0 og det gir likningen $15=\frac{30}{(1+r)^6}$, dvs $(1+r)^6=2$, dvs $r=2^{\frac{1}{6}}-1=\underline{\underline{12{,}25\%}}$.

Oppgave 5

Det er tre krav:

(1) $f(0)=0+0+200+300\cdot 1=500>0$

(2) $f'(x)=0{,}06x+5+3e^{0{,}01x}\geqslant 5+3=8\geqslant 0$ for $x\geqslant 0$ så $f(x)$ er voksende for $x\geqslant 0$.

(3) $f''(x) = 0{,}06 + 0{,}03e^{0{,}01x} \geqslant 0{,}09 \geqslant 0$ for $x \geqslant 0$ så $f(x)$ er konveks for $x \geqslant 0$.
Altså er $f(x)$ en kostnadsfunksjon.

Oppgave 6

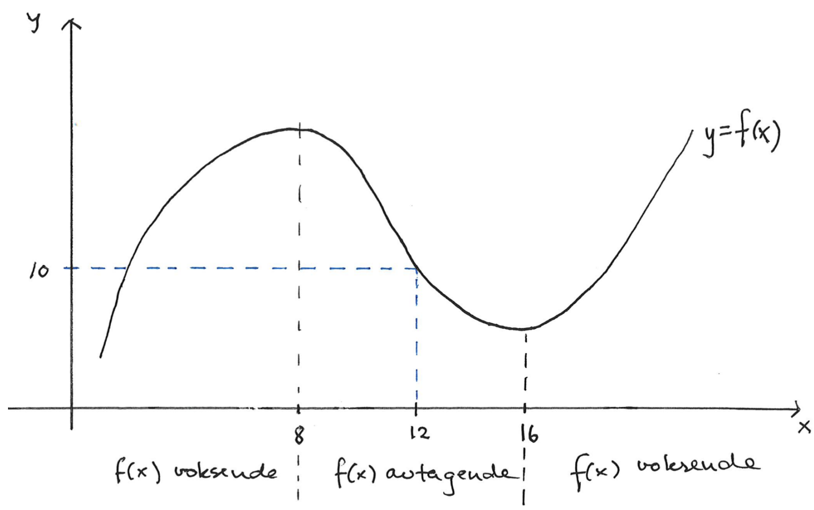
i) Ved produkt- og kjerneregelen får vi $D'(p) = e^{-0{,}05p} - 0{,}05(p+20)e^{-0{,}05p} = -0{,}05pe^{-0{,}05p}$. Da er

$$\varepsilon(p) = \frac{-0{,}05p^2e^{-0{,}05p}}{(p+20)e^{-0{,}05p}} = \underline{\underline{\frac{-0{,}05p^2}{(p+20)}}}$$

ii) Fordi $\varepsilon(40) = \frac{-0{,}05\cdot 40^2}{(40+20)} = \frac{-80}{60} = -\frac{4}{3} < -1$ så er etterspørselen priselastisk ved $p = 40$. Dermed vil inntekten gå ned hvis prisen øker litt fra $p = 40$.

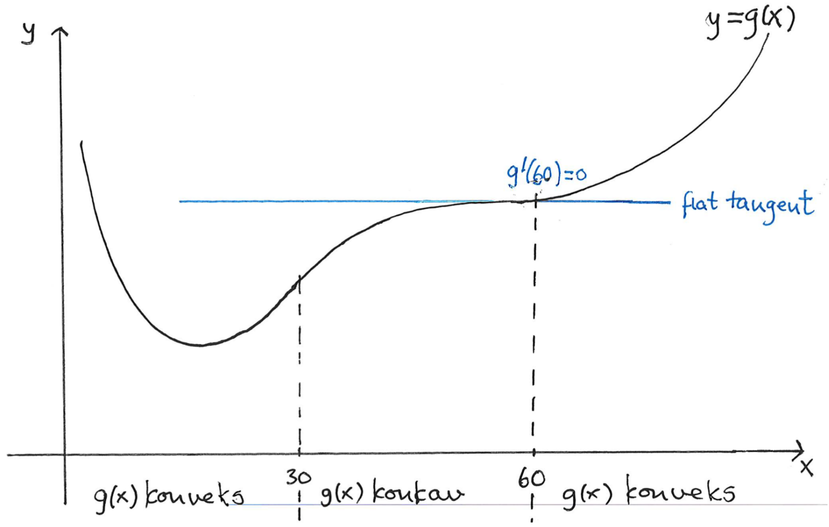
Oppgave 7

i) $f(x)$ er voksende i intervallet $\langle \infty\,, 8]$, avtagende i intervallet $[8\,, 16]$ og voksende i intervallet $[16\,, \infty\rangle$. Dessuten er $f(12) = 10$. Det kan gi en slik skisse (det er mange andre):



Figur 1: En mulig graf til $f(x)$

ii) $g(x)$ er konveks i intervallet $\langle \infty\,, 30]$, konkav i intervallet $[30\,, 60]$ og konveks i intervallet $[60\,, \infty\rangle$. Dessuten er tangenten til grafen flat for $x = 60$. Det kan gi en slik skisse (det er mange andre):



Figur 2: En mulig graf til $g(x)$

Oppgave 8

i) Galt. $f(x)$ har stasjonære punkter der $f'(x)=0$, dvs for $x\approx 1{,}3$, $x\approx 3{,}0$, $x\approx 8{,}2$ og $x\approx 12{,}7$ – altså fire stasjonære punkter.

ii) Galt. $f(x)$ er strengt voksende i intervallet $[4,8]$ fordi $f'(x)>0$ i dette intervallet. Altså er $f(4)<f(8)$.

iii) Rett. Vendepunkter for $f(x)$ er der $f''(x)$ skifter fortegn, dvs topp- og bunnpunkter for $f'(x)$. Vi ser at grafen har tre slike.

Oppgave 9

i) Vi finner de stasjonære punktene for $f(x)$ som ligger i D_f. Ved hjelp av kjerneregelen med $u(x)=x^2-20x+102$ og $g(u)=5\ln(u)$ beregner vi $f'(x)=\frac{5(2x-20)}{x^2-20x+102}$. Vi ser at nevneren er positiv for alle x fordi $x^2-20x+102=(x-10)^2+2\geqslant 2$. Altså er eneste stasjonære punkt $x=10\in D_f$. Maks. og min. finnes enten ved det stasjonære punktet eller i endepunktene av D_f (det er ingen knekkpunkter). Vi beregner $f(0)=5\ln(102)=23{,}12$, $f(10)=5\ln(2)=3{,}47$ og $f(25)=5\ln(15^2+2)=5\ln(227)=27{,}12$. Altså er $\underline{\underline{x=10}}$ minimumspunktet og $\underline{\underline{x=25}}$ maksimumspunktet til $f(x)$.

ii) Vi fikk minimumsverdien $f(10)=\underline{\underline{3{,}47}}$ og maksimumsverdien $f(25)=\underline{\underline{27{,}12}}$.

Oppgave 10

Taylorpolynomet av andre orden for $f(x)$ ved $x=10$ er $P_2(x)=200-3(x-10)+0{,}5(x-10)^2$. Dermed vil $f(12)\approx P_2(12)=200-3(12-10)+0{,}5(12-10)^2=\underline{\underline{196}}$.

Oppgave 11

i) Vi har alltid $D_g=V_f$ og $V_g=D_f$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2022e^x}{e^x+1}\overset{\text{l'Hôp}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2022e^x}{e^x}=2022$$

og (uten l'Hôpital)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2022e^x}{e^x+1}=\frac{0}{1}=0$$

Fordi $f'(x)=\frac{2022e^x}{(e^x+1)^2}$ er positiv for alle x er $f(x)$ strengt voksende. Altså vil $0<f(x)<2022$ og $\underline{\underline{D_g=\langle 0,2022\rangle}}$ samtidig som $\underline{\underline{V_g \text{ er hele tallinjen}}}$. Et alternativ er å skrive om til $f(x)=2022-\frac{2022}{(e^x+1)}$ (ved «polynomdivisjon»). På denne formen er det enklere å se de horisontale asymptotene direkte.

ii) Vi setter $y=\frac{2022e^x}{e^x+1}$ og løser likningen for x. Multiplisérer først begge sider med e^x+1 og får $ye^x+y=2022e^x$. Ordner ledd med x på venstresiden og resten på høyresiden og får først $(y-2022)e^x=-y$. Deler med $(y-2022)$ på begge sider og får

$$e^x=\frac{-y}{y-2022}=\frac{y}{2022-y}$$

Fordi $D_g=\langle 0,2022\rangle$ er både teller og nevner positive, så brøken er positiv. Vi kan derfor sette den inn i $\ln(-)$. Det gir

$$x=\ln\left(\frac{y}{2022-y}\right)\qquad\text{dvs}\qquad g(x)=\underline{\underline{\ln\left(\frac{x}{2022-x}\right)}}=\underline{\underline{\ln(x)-\ln(2022-x)}}$$

Oppgave 12

i) Relativ endring (ofte kalt prosentvis endring) er

$$\frac{\text{ny pris} - \text{gammel pris}}{\text{gammel pris}} = \underline{\underline{\frac{b-a}{a}}}$$

ii) Hvis a er prisen før prisendringene vil $a \cdot (1 + r_1)$ være prisen etter første prisendring. Etter andre prisendring vil prisen være $a \cdot (1 + r_1) \cdot (1 + r_2)$ og etter den siste prisendringen er prisen $a \cdot (1 + r_1) \cdot (1 + r_2) \cdot (1 + r_3) = b$. Derfor er

$$\underline{\underline{a = \frac{b}{(1 + r_1) \cdot (1 + r_2) \cdot (1 + r_3)}}}$$