Skoleeksamen (3t) MET11805 - Matematikk for siviløkonomer

5. mai 2023

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

Vi ser at x er en felles faktor i alle leddene så $f(x) = x^4 - 7x^2 + 6x = x(x^3 - 7x + 6)$. Så prøver vi og finner at $x = 1$ er et nullpunkt for $x^3 - 7x + 6$, altså er $x - 1$ en faktor i $x^3 - 7x + 6$. Vi beregner $(x^3 - 7x + 6) : (x - 1)$ ved hjelp av polynomdivisjon:

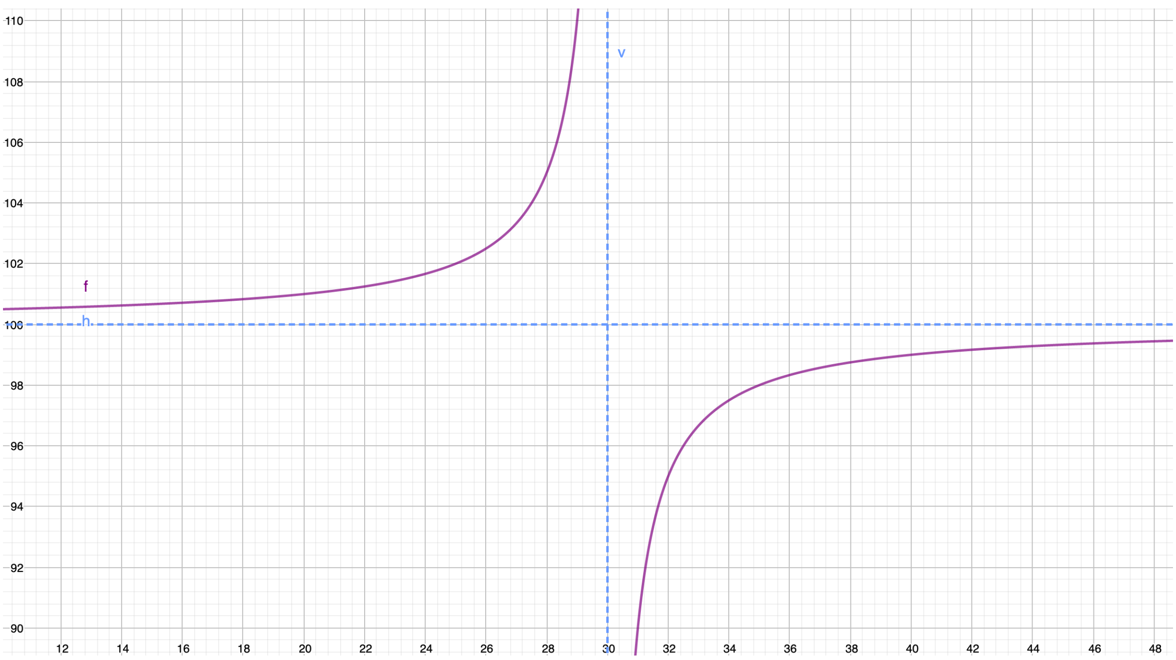
$$
\begin{array}{l}
\big(\;\; x^3 \qquad -7x + 6\big) : \big(x - 1\big) = x^2 + x - 6 \\
\underline{-x^3 + x^2} \\
\qquad x^2 - 7x \\
\quad \underline{-x^2 \;\; + x} \\
\qquad\quad -6x + 6 \\
\qquad\quad \underline{\;\;6x - 6} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Altså er $x^3 - 7x + 6 = (x - 1)(x^2 + x - 6)$ og fordi $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$ får vi $\underline{\underline{f(x) = x(x - 1)(x - 2)(x + 3)}}$.

Oppgave 2

i) Uttrykket for en hyperbelfunksjon kan skrives på standardformen $f(x) = c + \frac{a}{x-b}$ hvor horisontal asymptote $y = 100 = c$ og vertikal asymptote $x = 30 = b$. Altså gir $f(40) = 100 + \frac{a}{40-30} = 99$, dvs $a = -10$ og $\underline{\underline{f(x) = 100 - \frac{10}{x-30}}}$.

ii) En funksjonsverditabell hører med.



Figur 1: Grafen til $f(x)$ med asymptoter

Oppgave 3

i) Vi skriver $f(x) = x^{1,5}$ og bruker potensregelen: $f'(x) = \underline{\underline{1{,}5x^{0,5}}} = \underline{\underline{1{,}5\sqrt{x}}}$.

ii) Vi bruker brøkregelen: $f'(x) = \frac{3(x-1)-(3x-4)\cdot 1}{(x-1)^2} = \underline{\underline{\frac{1}{(x-1)^2}}}$

iii) Vi bruker kjerneregelen med $u = 2x+3$ og så potensregelen og får:
$f'(x) = 2\cdot 50 \cdot (2x+3)^{49} = \underline{\underline{100(2x+3)^{49}}}$

Oppgave 4

a) Summen av nåverdiene til hver av betalingene (i millioner) er

$$\underline{\underline{\frac{2}{1{,}06^5} + \frac{2}{1{,}06^6} + \cdots + \frac{2}{1{,}06^{n+3}} + \frac{2}{1{,}06^{n+4}}}}$$

b) Vi leser den geometriske rekken baklengs. Da er første ledd $a_1 = \frac{2}{1{,}06^{n+4}}$, den multipliserende faktoren $k = 1{,}06$ og antall ledd er n. Det gir summen

$$\frac{2}{1{,}06^{n+4}} \cdot \frac{1{,}06^n - 1}{0{,}06}$$

Med $n = 20$ får vi nåverdien (i millioner)

$$\frac{2}{1{,}06^{24}} \cdot \frac{1{,}06^{20} - 1}{0{,}04} = \underline{\underline{18{,}17}}$$

c) Hvis kontantstrømmen fortsetter i all fremtid får vi nåverdien

$$a_1 \cdot \frac{1}{1-k} = \frac{2}{1{,}06^5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1{,}06}} = \underline{\underline{26{,}40}}$$

Her leser vi den uendelig geometriske rekken fra venstre og da er multiplikasjonsfaktoren $k = \frac{1}{1{,}06}$.

Oppgave 5

i) Vi kvadrerer hver side og får $10 - x^2 = x^2 - 4x + 4$, dvs $2x^2 - 4x = 6$, dvs $x^2 - 2x = 3$. Vi fullfører kvadratet og får $(x-1)^2 = 4$ som gir kandidatløsninger $x = -1$, $x = 3$. Men $x = -1$ gir venstresiden i den opprinnelige likningen lik 3 mens høyresiden blir -3. For $x = 3$ får vi 1 på begge sider. Altså er eneste løsning $\underline{\underline{x = 3}}$.

ii) Her bruker vi en regneregel for logaritmer og får likningen $\ln(\frac{x+2}{x}) \leqslant 0{,}1$. Setter begge sider inn i $e^{(-)}$ (en strengt voksende funksjon) og får den ekvivalente ulikheten $\frac{x+2}{x} \leqslant e^{0,1}$. Trekker fra $e^{0,1}$ på begge sider og lager en felles brøk. Det gir

$$\frac{(1-e^{0,1})x + 2}{x} \leqslant 0$$

Fordi den opprinnelig ulikheten bare er definert for $x > 0$ så vi får den ekvivalente ulikheten $(1-e^{0,1})x + 2 \leqslant 0$, dvs $(1-e^{0,1})x \leqslant -2$. Vi deler med det negative tallet $(1-e^{0,1})$ på begge sider og får $\underline{\underline{x \geqslant \frac{2}{e^{0,1}-1} \approx 19{,}02}}$.

Oppgave 6

i) Ved bruk av kjerneregelen får vi at grensekostnadsfunksjonen er $K'(x) = \underline{\underline{0{,}05 \cdot K_0 \cdot e^{0{,}05x}}} = \underline{\underline{0{,}05 \cdot K(x)}}$.

ii) Siden kostnadsfunksjonen er strengt konveks er kostnadsoptimum løsningen på likningen $A(x) = K'(x)$ der $A(x) = \frac{K(x)}{x}$ er gjennomsnittlig enhetskostnad. Dvs $\frac{K(x)}{x} = 0{,}05 \cdot K(x)$. Vi deler på $K(x)$ på begge sider og får $\frac{1}{x} = 0{,}05$ dvs $x = \frac{1}{0{,}05} = \underline{\underline{20}}$.
Optimal enhetskostnad er enhetskostnaden når man produserer kostnadsoptimum mange enheter. Fra likningen får vi $A(20) = K'(20) = 0{,}05 \cdot K_0 \cdot e^{0{,}05 \cdot 20} = \underline{\underline{0{,}05e \cdot K_0}} \approx \underline{\underline{0{,}1359 \cdot K_0}}$.

Oppgave 7

i) Vi har $f'(x) = (16x^2 - 25)/x$. Vi har $16x^2 - 25 \leqslant 0$ hvis og bare hvis $-\frac{5}{4} \leqslant x \leqslant \frac{5}{4}$. Men $f(x)$ er bare definert for $x > 0$ så vi får $f'(x) \leqslant 0$ for $0 < x \leqslant \frac{5}{4}$ og $f'(x) \geqslant 0$ for $x \geqslant \frac{5}{4}$. Altså er $f(x)$ avtagende i intervallet $\langle 0, \frac{5}{4}]$ og voksende i intervallet $[\frac{5}{4}, \rightarrow\rangle$.

ii) Vi har $f''(x) = (16x^2 + 25)/x^2 > 0$ for alle $x > 0$. Så $f(x)$ er konveks for alle $x > 0$.

Oppgave 8

i) $f(x)$ har stasjonære punkter der $f'(x) = 0$, dvs der tangenten er horisontal. I intervallet $[3, 10]$ er det ved (omtrent) $x = 4{,}8$ og $x = 7{,}5$. Påstanden er gal.

ii) $f(x)$ har vendepunkter der $f''(x)$ endrer fortegn, dvs overganger fra konveks til konkav. I intervallet $\langle 4, 24]$ skjer dette (omtrent) ved $x = 6$, $x = 9{,}8$ og ved $x = 17{,}8$. Påstanden er rett.

iii) $f'(x)$ er avtagende der $f''(x) \leqslant 0$, dvs der $f(x)$ er konkav. I intervallet $[12, 24]$ er $f(x)$ først konkav frem til 17,6, deretter konveks. Altså er ikke $f'(x)$ avtagende i hele intervallet. Påstanden er gal.

Oppgave 9

i) Ved potensregelen er $D'(p) = 30 \cdot (-0{,}8)p^{-1{,}8}$. Da er

$$\varepsilon(p) = \frac{D'(p) \cdot p}{D(p)} = \frac{30 \cdot (-0{,}8)p^{-1{,}8} \cdot p}{30p^{-0{,}8}} = \underline{\underline{-0{,}8}} \quad \text{(en konstant funksjon)}$$

ii) Fordi $\varepsilon(20) = -0{,}8 > -1$ er etterspørselsfunksjonen uelastisk ved $p = 20$. Dermed går inntekten opp hvis prisen øker litt fra $p = 20$. Dette kan vi også se direkte da inntektsfunksjonen $I(p) = p \cdot D(p) = 30p^{0{,}2}$ er en voksende funksjon.

Oppgave 10

i) Vi setter $y = e^{-0{,}02x} + 100$ og løser for x. Det gir først $e^{-0{,}02x} = y - 100$. Ved å sette begge sider inn i $\ln(-)$ får vi $-0{,}02x = \ln(y - 100)$. Multipliserer med -50 på begge sider og får $y = -50\ln(y - 100)$. Bytter variabler og får $\underline{\underline{g(x) = -50\ln(x - 100)}}$.

ii) Vi har alltid $D_g = V_f$. Fordi $f(x)$ er en strengt avtagende funksjon er største funksjonsverdi $f(0) = 101$. Vi ser også at

$$f(x) = 100 + 1/e^{0{,}02x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 100^+$$

Altså er $D_g = V_f = \underline{\underline{\langle 100, 101]}}$. Vi har alltid $V_g = D_f$ så $\underline{\underline{V_g = [0, \infty\rangle}}$.

Oppgave 11

i) Med kontinuerlig kapitalisering er årlig vekstfaktor $e^{0,072}$. Dermed er årlig effektiv rente $\underline{\underline{r_{\text{eff}} = e^{0,072} - 1 = 7{,}47\%}}$.

ii) Hvis r er renten er nåverdien av kontantstrømmen gitt som $-A + B/(1+r)^5$. For at r skal være internrenten til kontantstrømmen må nåverdien være 0, dvs $B/(1+r)^5 = A$, dvs $(1+r)^5 = B/A$, dvs $1 + r = (B/A)^{1/5}$. Altså er internrenten $\underline{\underline{r = (B/A)^{1/5} - 1}}$.

Vi kan også tenke at det er kontinuerlig kapitalisering. Da er nåverdien $-A + B \cdot e^{-5r}$. Det gir likningen $B \cdot e^{-5r} = A$ for internrenten, dvs $e^{5r} = B/A$. Altså er internrenten $\underline{\underline{r = \frac{1}{5}\ln(B/A)}}$.

Oppgave 12

i) Vi tenker på y som en (ubestemt) funksjon av x og deriverer begge sider av likningen med hensyn på x. Det gir $3x^2 - 4y - 4xy' + 2yy' = 0$. Her har vi brukt produktregelen og kjerneregelen. Så løser vi likningen for y'. Samler ledd med y' på venstre side og faktoriserer: $(2y - 4x)y' = 4y - 3x^2$. Deler med $(2y - 4x)$ på begge sider og får

$$\underline{\underline{y' = \frac{4y - 3x^2}{2y - 4x}}}$$

ii) Vi bruker ettpunktsformelen $y - 3 = a(x - 1)$ hvor a er stigningstallet gitt ved uttrykket for y', nemlig $a = (4 \cdot 3 - 3 \cdot 1^2)/(2 \cdot 3 - 4 \cdot 1) = 9/2$. Altså er tangentlikningen $y - 3 = 4{,}5(x - 1)$ som gir $\underline{\underline{y = 4{,}5x - 1{,}5}}$.