SENSORVEILEDNING - Fagoppgave

MET 11806
Matematikk for siviløkonomer

Institutt for Samfunnsøkonomi

Utlevering:	19.10.2020	Kl. 09:00
Innlevering:	26.10.2020	Kl. 12:00

For mer informasjon om formalia, se eksamensoppgaven.

Løsning	MET 11806 Matematikk for siviløkonomer
Innleveringsfrist	26. oktober 2020 kl 1200

Vi benytter maksimal score 6p på hver deloppgave og 144p totalt, og grensen for å bestå er ca 86p. Du kan selv fylle ut tabellen nedenfor med dine poeng og regne ut poengsum. Vi legger størst vekt på av valg av metode (begrunnet i teori hvis det ikke er opplagt), og gjennomføring av metode (at regningen er riktig). Vi legger ikke stor vekt på at svaret er riktig, og andre måter å skrive svaret på enn det som er brukt her kan gi full score. Vi trekker ikke for følgefeil.

Oppgave	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	Total	Karakter	A	B	C	D	E
Poeng	24	12	12	18	18	18	24	6	12	144	Grenser	130	110	84	66	58
Score																

Oppgave 1. 24 P.

(a) $\int \frac{1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int x^{-3/2}\,\mathrm{d}x = -2x^{-1/2} + C = -2/\sqrt{x} + C.$
(b) $\int \frac{6-2x}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{6}{x^3} - 2\frac{x}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int 6x^{-3} - 2x^{-2}\,\mathrm{d}x = -3x^{-2} + 2/x + C = -3/x^2 + 2/x + C$
(c) $\int \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int x - 1 + \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln|1+x| + C$
(d) $\int 16(4+2x)^7\,\mathrm{d}x = \int 16u^7 \cdot 1/2\,\mathrm{d}u = u^8 + C = (4+2x)^8 + C$

Oppgave 2. 12 P.

(a) Vi skriver ned den utvidede matrisen til systemet, markerer første pivot-posisjon, og gjør elementære radoperasjoner som bruker første pivot til å eliminere tallene i posisjonene under:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & 8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -7 & -11 \\ 1 & -2 & 5 & 8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -7 & -11 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Resultatet er en trappeform, hvor vi har markert alle pivotposisjoner. Det er dermed en løsning, og vi finner den ved baklengs substitusjon:

$$\begin{aligned} 2z &= 2 & & & z &= 1 \\ 4y - 7z &= -11 &\Rightarrow\quad 4y &= -11 + 7(1) & y &= -1 \\ x - 2y + 3z &= 6 &\Rightarrow\quad x &= 6 + 2(-1) - 3(1) & x &= 1 \end{aligned}$$

Løsningen er altså $(x,y,z) = (1,-1,1)$.

(b) Vi skriver ned den utvidede matrisen til systemet, markerer første pivot-posisjon, og gjør elementære radoperasjoner som bruker første pivot til å eliminere tallene i posisjonene under:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 6 & 12 & 15 \\ -3 & 1 & 5 & -5 \\ 5 & 3 & 3 & 15 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 6 & 12 & 15 \\ 0 & 7 & 17 & 10 \\ 5 & 3 & 3 & 15 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 6 & 12 & 15 \\ 0 & 7 & 17 & 10 \\ 0 & -7 & -17 & -10 \end{array}\right)$$

Så markerer vi pivotposisjonen i andre rad, og bruker den til å eliminere tallet i posisjonen under:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 6 & 12 & 15 \\ 0 & 7 & 17 & 10 \\ 0 & -7 & -17 & -10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 17 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Resultatet er en trappeform, hvor vi har markert alle pivotposisjoner. Det er uendelig mange løsninger, med z fri siden z-kolonnen ikke har noen pivotposisjoner, og vi finner løsningene ved baklengs substitusjon:

$$\begin{aligned} 7y + 17z &= 10 &\Rightarrow\quad 7y &= 10 - 17z & y &= 10/7 - 17z/7 \\ x + 2y + 4z &= 5 &\Rightarrow\quad x &= 5 - 2(10/7 - 17z/7) - 4z & x &= 15/7 + 6z/7 \end{aligned}$$

Løsningen er altså $(x,y,z) = (15/7 + 6z/7, 10/7 - 17z/7, z)$ der z er en fri variabel.

Oppgave 3. 12 P.

a) Vi deriverer f og finner at

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (x+3) - (1-\sqrt{x}) \cdot 1}{(x+3)^2} = \frac{-(x+3) - 2\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}(x+3)^2}$$
$$= \frac{-x-3+2x-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x+3)^2} = \frac{x-3-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x+3)^2} = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}{2\sqrt{x}(x+3)^2}$$

For å finne faktoriseringen i teller, har vi satt $u = \sqrt{x}$, som gir $x - 2\sqrt{x} - 3 = u^2 - 2u - 3$. Dette uttrykket har faktoriseringen $(u+1)(u-3) = (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)$. Siden f er definert for $x \geq 0$, og alle faktorene i $f'(x)$ bortsett fra $\sqrt{x} - 3$ er positive for $x > 0$, er $f'(x) \leq 0$ i $[0{,}9]$ og $f'(x) \geq 0$ i $[9{,}\infty)$. Det betyr at f er avtagende i $[0{,}9]$ og voksende i $[9{,}\infty)$.

b) Siden f er avtagende i $[0{,}9]$ og voksende i $[9{,}\infty)$, så har f et (globalt) minimum i $x = 9$, og minimumsverdien er $f_{\text{min}} = f(9) = -2/12 = -1/6$. Vi har at $f(0) = 1/3$ og at $f(x) \to 0$ når $x \to \infty$. Derfor har f et (globalt) maksimum i $x = 0$, og maksimumsverdien er $f_{\text{max}} = 1/3$.

Oppgave 4. 18 P.

(a) Vi regner ut determinanten til A ved å bruke kofaktorutvikling langs første kolonne, og får $|A| = 1(40-16) - 3(8-10) = 24 + 6 = 30$. Dermed har vi at

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 24 & -24 & 30 \\ -2 & 7 & -5 \\ -2 & -8 & 10 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 24 & -2 & -2 \\ -24 & 7 & -8 \\ 30 & -5 & 10 \end{pmatrix}$$

(b) Vi har at

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 10 & 2 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & 8 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -5 & -11 \\ -5 & 105 & 89 \\ -11 & 89 & 81 \end{pmatrix}$$

(c) Vi har at

$$E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = E_3 \cdot E_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & 8 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = E_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 5. 18 P.

(a) Siden $|x| = x$ for $x \geq 0$, har vi at

$$\int_0^1 x|x|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = (1/3) - 0 = 1/3$$

(b) Vi har at

$$\int_a^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_a^1 x^{-2}\,\mathrm{d}x = \left[-x^{-1}\right]_a^1 = -1 + \frac{1}{a}$$

Dermed er

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+}\left(-1 + \frac{1}{a}\right) = \infty$$

(c) Substitusjon gir $\int x\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int e^u\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}e^u + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C = F(x) + C$. Siden $F(b) \to 0$ når $b \to \infty$, har vi at

$$\int_0^\infty x\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 0 - F(0) = \frac{1}{2}$$

Oppgave 6. 18 P.

(a) Determinanten er gitt ved

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & s \\ 2 & s & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1(3s-4) - 1(6-4) + s(2-s) = -s^2 + 5s - 6 = -(s-2)(s-3)$$

Vi har dermed at $|A| = 0$ når $s = 2$ og $s = 3$, og det lineære systemet har eksakt en løsning når $s \neq 2, 3$.

(b) Determinanten er gitt ved

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & t \\ t & 1 & t \end{vmatrix} = 1(t^2 - t) - 1(t - t^2) + 1(1 - t^2) = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$$

Vi har dermed at $|A| = 0$ når $t = 1$, og det lineære systemet har eksakt en løsning når $t \neq 1$.

(c) Determinanten er gitt ved

$$|A| = \begin{vmatrix} t & 1 & t \\ 1 & t & -1 \\ t & -1 & t \end{vmatrix} = t(t^2 - 1) - 1(t + t) + t(-1 - t^2) = -4t$$

Vi har dermed at $|A| = 0$ når $t = 0$, og det lineære systemet har eksakt en løsning når $t \neq 0$.

Oppgave 7. 24 P.

(a) Vi bruker delvis integrasjon med $u' = 5x\sqrt{x} = 5x^{3/2}$ og $v = \ln x$, som gir $u = 2x^{5/2} = 2x^2\sqrt{x}$ og $v' = 1/x$, og dermed at

$$\int 5x\sqrt{x}\,\ln(x)\,\mathrm{d}x = 2x^2\sqrt{x}\,\ln(x) - \int 2x^{5/2}x^{-1}\,\mathrm{d}x = 2x^2\sqrt{x}\,\ln(x) - \int 2x^{3/2}\,\mathrm{d}x$$
$$= 2x^2\sqrt{x}\,\ln(x) - \frac{4}{5}x^2\sqrt{x} + C \quad 6\,\text{P.}$$

(b) Vi skriver integralet som $\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x$ og bruker delvis integrasjon med $u' = e^{-x}$ og $v = x$, som gir $u = -e^{-x}$ og $v' = 1$, og dermed at

$$\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x = x(-e^{-x}) - \int 1(-e^{-x})\,\mathrm{d}x = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,\mathrm{d}x = -xe^{-x} - e^{-x} + C \quad 6\,\text{P.}$$

(c) Vi faktoriserer nevner som $4 - x^2 = (2+x)(2-x)$, og forenkler uttrykket ved delbrøksoppspaltning. Dette gir

$$\frac{2x+2}{4-x^2} = \frac{A}{2+x} + \frac{B}{2-x} \quad \Rightarrow \quad 2x + 2 = A(2-x) + B(2+x)$$

Det vil si $2x + 2 = 2(A+B) + (B-A)x$, eller at $2(A+B) = 2$ og $B - A = 2$. Dette lineære systemet gir $B = 3/2$ og $A = -1/2$, og integralet blir dermed

$$\int \frac{2x+2}{4-x^2}\,\mathrm{d}x = \int -\frac{1}{2}\frac{1}{2+x} + \frac{3}{2}\frac{1}{2-x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln|2+x| - \frac{3}{2}\ln|2-x| + C \quad 6\,\text{P.}$$

(d) Vi bruker substitusjonen $u = 1 - \sqrt{x}$, som gir $\mathrm{d}u = (-1/2)x^{-1/2}\,\mathrm{d}x$, eller $\mathrm{d}x = -2\sqrt{x}\,\mathrm{d}u$. Dette gir

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{x}}{u}(-2\sqrt{x})\,\mathrm{d}u = \int \frac{-2(\sqrt{x})^2}{u}\,\mathrm{d}u = \int \frac{-2(1-u)^2}{u}\,\mathrm{d}u$$
$$= \int \frac{-2u^2 + 4u - 2}{u}\,\mathrm{d}u = \int -2u + 4 - \frac{2}{u}\,\mathrm{d}u = -u^2 + 4u - 2\ln|u| + C$$
$$= -(1-\sqrt{x})^2 + 4(1-\sqrt{x}) - 2\ln|1-\sqrt{x}| + C = -x - 2\sqrt{x} - 2\ln|1-\sqrt{x}| + C$$

I første linje har vi brukt at $u = 1 - \sqrt{x}$, eller $\sqrt{x} = 1 - u$. 6 P.

Oppgave 8. 6 P.

Vi regner først ut determinanten til koeffisientmatrisen A til det lineære systemet, ved å utvikle determinanten langs første rad:

$$|A| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 2 & 1 & t \\ 4 & t & 2 \end{vmatrix} = t(2-t^2) - 1(4-4t) + 1(2t-4) = 2t - t^3 - 4 + 4t + 2t - 4 = -t^3 + 8t - 8$$

Vi ser at $t = 2$ gir $|A| = 0$, og vi finner faktoriseringen

$$|A| = -(t^3 - 8t + 8) = -(t-2)(t^2 + 2t - 4)$$

ved polynomdivisjon. Siden $t^2 + 2t - 4 = 0$ har løsningene

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4+16}}{2} = -1 \pm \sqrt{5}$$

er $\det(A) = 0$ for $t_1 = 2$, $t_2 = -1 + \sqrt{5} \approx 1.23$ og $t_3 = -1 - \sqrt{5} \approx -3.23$. Dermed har systemet ingen eller uendelig mange løsninger for disse tre t-verdiene, og eksakt én løsning for alle andre verdier av t. Vi ser først på tilfellet $t = 2$, og løser systemet ved Gauss-eliminasjon:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vi ser at systemet har uendelig mange løsninger for $t = 2$, med y som fri variabel. Løsningene er gitt ved $z = 0$ og $2x + y + z = 2$, som gir $2x = 2 - y - z = 2 - y$, eller $x = 1 - y/2$. For $t = 2$ er altså løsningene gitt ved

$$(x,y,z) = (1 - y/2, y, 0) \text{ der } y \text{ er en fri variabel}$$

Vi forsøker å undersøke de to andre t-verdiene $t = -1 \pm \sqrt{5}$ samtidig, ved å bruke Gauss-eliminasjon. Vi bytter først om på radene og multipliserer med 2 i siste rad:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} t & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & t & t \\ 4 & t & 2 & 4 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & t & t \\ 4 & t & 2 & 4 \\ t & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & t & t \\ 4 & t & 2 & 4 \\ 2t & 2 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Så eliminerer vi koeffisientene under første and andre pivot:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & t & t \\ 4 & t & 2 & 4 \\ 2t & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & t & t \\ 0 & t-2 & 2-2t & 4-2t \\ 0 & 2-t & 2-t^2 & 4-t^2 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & t & t \\ 0 & t-2 & 2-2t & 4-2t \\ 0 & 0 & 4-2t-t^2 & 8-2t-t^2 \end{array}\right)$$

Vi setter så inn $t = -1 \pm \sqrt{5}$. Da er $t - 2 \neq 0$ en pivot i andre rad, og $4 - 2t - t^2 = 0$ fordi de to t-verdiene er løsningene av $t^2 + 2t - 4 = 0$. Men $8 - 2t - t^2 \neq 0$, og systemet har derfor ingen løsninger for $t = -1 \pm \sqrt{5}$. Vi kan også se dette ved å sette inn tilnærmingsverdier for $t = -1 \pm \sqrt{5}$ og gjøre Gauss eliminasjon med tilnærmingsverdiene. For alle andre verdier enn $t = 2$ og $t = -1 \pm \sqrt{5}$ er det eksakt én løsning, og vi finner den ved hjelp av Kramers regel:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ t & 1 & t \\ 4 & t & 2 \end{vmatrix} = -t^2 + 2t \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{-t(t-2)}{-(t-2)(t^2+2t-4)} = \frac{t}{t^2+2t-4}$$

$$\begin{vmatrix} t & 2 & 1 \\ 2 & t & t \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -2t^2 + 4t \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{-2t(t-2)}{-(t-2)(t^2+2t-4)} = \frac{2t}{t^2+2t-4}$$

$$\begin{vmatrix} t & 1 & 2 \\ 2 & 1 & t \\ 4 & t & 4 \end{vmatrix} = -t^3 + 12t - 16 \qquad \Rightarrow \qquad z = \frac{-(t-2)^2(t+4)}{-(t-2)(t^2+2t-4)} = \frac{(t-2)(t+4)}{t^2+2t-4}$$

For å forenkle uttrykket for z, har vi brukt at $-t^3+12t-16$ har et nullpunkt i $t = 2$, og polynomdivisjon gir $-t^3 + 12t - 16 = (t-2)(-t^2 - 2t + 8) = -(t-2)^2(t+4)$. 6 P.

Oppgave 9. 12 P.

a) Vi undersøker om $\mathbf{v}_4$ er en lineærkombinasjon av de første tre vektorene ved å løse vektorlikningen $\mathbf{v}_4 = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3$. Dette gir et lineært likningssystem med følgende utvidede matrise, og vi starter Gauss-prosessen:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 12 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 3 & 16 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & -4 & 10 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -8 & -3 & 13 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -4 & 10 \\ 0 & -8 & -3 & 13 \end{array}\right)$$

I den siste radoperasjonen bytter vi om andre og tredje rad. Vi fullfører så Gauss-prosessen:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -4 & 10 \\ 0 & -8 & -3 & 13 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -18 & -18 \\ 0 & 0 & -19 & -19 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -18 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vi ser at det lineære systemet har en løsning, og $\mathbf{v}_4$ er derfor en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. Vi finner løsningen til det lineære systemet, som er gitt ved

$$\begin{aligned} -18z &= -18 & & & z &= 1 \\ -y + 2z &= 4 & \Rightarrow \quad -y &= 4 - 2(1) & y &= -2 \\ x + 3y + 2z &= 1 & \Rightarrow \quad x &= 1 - 3(-2) - 2(1) & x &= 5 \end{aligned}$$

Løsningen er altså $(x,y,z) = (5,-2,1)$, og det betyr at $\mathbf{v}_4 = 5\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$. 6 P.

b) Siden vektoren $\mathbf{v}_4 = 5\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ er en lineærkombinasjon av de andre kolonnevektorene i A, så er $|A| = 0$. Det betyr at

$$\det(A^T A) = \det(A^T)\det(A) = \det(A)\det(A) = 0 \quad 6\,\text{P.}$$