SENSORVEILEDNING - Fagoppgave

MET 11806
Matematikk for siviløkonomer

Institutt for Samfunnsøkonomi

Utlevering:	15.03.2021	Kl. 09:00
Innlevering:	22.03.2021	Kl. 12:00

For mer informasjon om formalia, se eksamensoppgaven.

Løsning	MET 11806 Matematikk for siviløkonomer
Innleveringsfrist	22. mars 2021 kl 1200

Vi benytter maksimal score 6p på hver deloppgave og 144p totalt, og grensen for å bestå er ca 86p. Du kan selv fylle ut tabellen nedenfor med dine poeng og regne ut poengsum. Vi legger størst vekt på av valg av metode (begrunnet i teori hvis det ikke er opplagt), og gjennomføring av metode (at regningen er riktig). Vi legger ikke stor vekt på at svaret er riktig, og andre måter å skrive svaret på enn det som er brukt her kan gi full score. Vi trekker ikke for følgefeil, og antall poeng for delvis løsning er vist.

Oppgave	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	Total	Karakter	A	B	C	D	E
Poeng	24	12	24	18	12	6	18	18	12	144	Grenser	130	110	84	66	58
Score																

Oppgave 1. 24 P.

a) $\int 10x\sqrt{x}\ \mathrm{d}x = \int 10x^{3/2}\ \mathrm{d}x = 10(2/5)x^{5/2} + C = 4x^2\sqrt{x} + C$ 6 P.

b) $\int \frac{2x-1}{x^2}\ \mathrm{d}x = \int 2/x - x^{-2}\ \mathrm{d}x = 2\ln|x| + x^{-1} = 2\ln|x| + 1/x + C$ 6 P.

c) $\int 4x(1-x^2)\ \mathrm{d}x = \int 4x - 4x^3\ \mathrm{d}x = 2x^2 - x^4 + C$ 6 P.

d) $\int 12(1+4x)^2\ \mathrm{d}x = \int 12u^2 \cdot 1/4\ \mathrm{d}u = u^3 + C = (1+4x)^3 + C$ 6 P.

Oppgave 2. 12 P.

a) Vi skriver ned den utvidede matrisen til systemet, markerer første pivot-posisjon, og gjør elementære radoperasjoner som bruker første pivot til å eliminere tallene i posisjonene under:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & 8 & -2 & 23 \\ 2 & 6 & -5 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 8 \\ 2 & 6 & -5 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Så markerer vi pivotposisjonen i andre rad, og bruker den til å eliminere tallet i posisjonen under:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right) \text{ 3 P.}$$

Resultatet er en trappeform, hvor vi har markert alle pivotposisjoner. Det er dermed ingen løsninger. 3 P.

b) Vi skriver ned den utvidede matrisen til systemet, markerer første pivot-posisjon, og gjør elementære radoperasjoner som bruker første pivot til å eliminere tallene i posisjonene under:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 & 11 \\ 4 & 9 & 12 & -1 & 40 \\ 5 & 10 & 16 & 1 & 51 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & -4 \\ 5 & 10 & 16 & 1 & 51 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & -4 \end{array}\right)$$

Vi markerer pivotposisjonen i andre rad og tredje rad, og ser at vi har en matrise på trappeform:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & -4 \end{array}\right) \text{ 3 P.}$$

Det er dermed uendelig mange løsninger 1 P. med w fri siden w-kolonnen ikke har noen pivotposisjoner, og vi finner løsningene ved baklengs substitusjon:

$$\begin{aligned} -4z - 4w = -4 \quad &\Rightarrow \quad -4z = -4 + 4w & z &= 1 - w \\ y - 4z - 5w = -4 \quad &\Rightarrow \quad y = 4(1-w) + 5w - 4 & y &= w \\ x + 2y + 4z + w = 11 \quad &\Rightarrow \quad x = 11 - 2(w) - 4(1-w) - w & x &= 7 + w \end{aligned}$$

Løsningen er altså $(x,y,z,w) = (7+w, w, 1-w, w)$ der w er en fri variabel. 2 P.

Oppgave 3. 24 P.

(a) Vi bruker substitusjonen $u = 1 + e^x$, som gir $\mathrm{d}u = u' \, \mathrm{d}x = e^x \, \mathrm{d}x$. 3 P. Dette gir

$$\int \frac{e^x}{1+e^x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{e^x}{u} \frac{\mathrm{d}u}{e^x} = \int \frac{1}{u} \, \mathrm{d}u = \ln|u| + C = \ln(1+e^x) + C \text{ 3 P.}$$

(b) Vi faktoriserer nevner som $1 - 4x^2 = (1+2x)(1-2x)$, og forenkler uttrykket ved delbrøksoppspaltning. Dette gir

$$\frac{1-x}{1-4x^2} = \frac{A}{1+2x} + \frac{B}{1-2x} \quad \Rightarrow \quad 1 - x = A(1-2x) + B(1+2x)$$

Det vil si $1 - x = (A+B) + (2B - 2A)x$, eller at $A + B = 1$ og $2B - 2A = -1$. Dette lineære systemet gir $B = 1/4$ og $A = 3/4$, 3 P. og integralet blir dermed

$$\int \frac{1-x}{1-4x^2} \, \mathrm{d}x = \int \frac{3}{4} \frac{1}{1+2x} + \frac{1}{4} \frac{1}{1-2x} \, \mathrm{d}x = \frac{3}{4} \frac{1}{2} \ln|1+2x| + \frac{1}{4} \frac{1}{(-2)} \ln|1-2x| + C$$
$$= \frac{3}{8} \ln|1+2x| - \frac{1}{8} \ln|1-2x| + C \text{ 3 P.}$$

(c) Vi kan bruke substitusjonen $u = \ln x$, som gir $\mathrm{d}u = (1/x) \, \mathrm{d}x$, 3 P. og dette gir

$$\int \frac{3(\ln x)^2}{x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{3u^2}{x} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{1/x} = \int 3u^2 \, \mathrm{d}u = u^3 + C = (\ln x)^3 + C \text{ 3 P.}$$

Det er alternativt mulig å bruke delvis integrasjon, med $u' = 1/x$ og $v = (\ln x)^2$.

(d) Vi bruker substitusjonen $u = -x\sqrt{x} = -x^{3/2}$, som gir $\mathrm{d}u = u' \, \mathrm{d}x = (-3/2)x^{1/2} \, \mathrm{d}x$. Dette gir

$$\int 6x^2 \, e^{-x\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = \int 6x^2 \, e^u \, \frac{\mathrm{d}u}{(-3/2)x^{1/2}} = \int -4x^{3/2} \, e^u \, \mathrm{d}u = \int 4ue^u \, \mathrm{d}u \text{ 3 P.}$$
$$= 4ue^u - \int 4e^u \, \mathrm{d}u = 4ue^u - 4e^u + C = (-4x\sqrt{x} - 4)e^{-x\sqrt{x}} + C \text{ 3 P.}$$

Overgangen fra første til andre linje er ved delvis integrasjon.

Oppgave 4. 18 P.

(a) Determinanten er gitt ved

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 2a \\ a & 3 \end{vmatrix} = 18 - 2a^2 = 2(9 - a^2) = 2(3-a)(3+a) \text{ 3 P.}$$

Vi har dermed at $|A| = 0$ når $a = \pm 3$. 3 P.

(b) Vi regner ut determinanten ved kofaktorutvikling langs første rad:

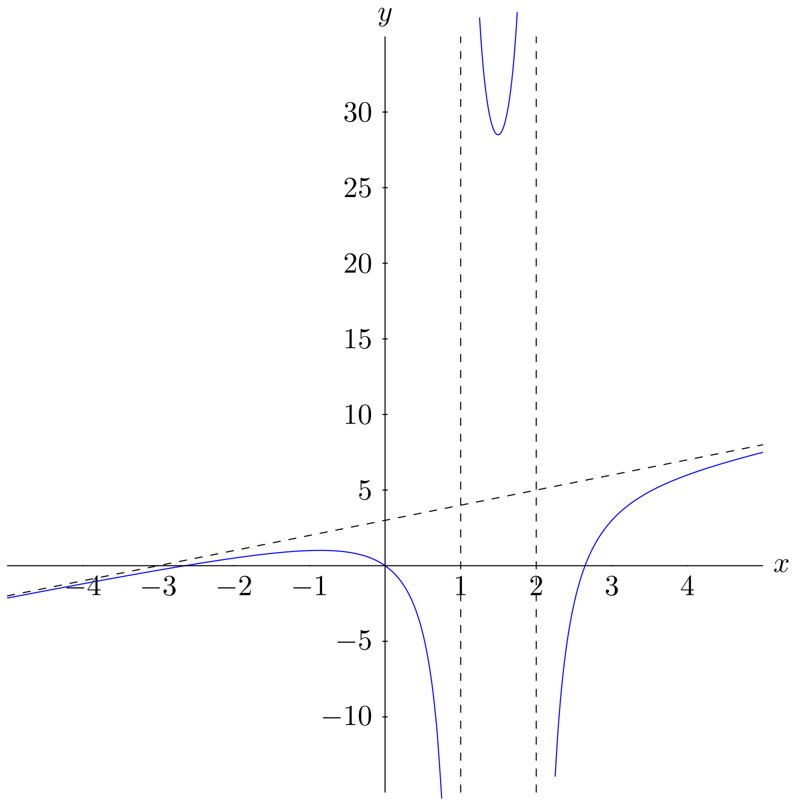
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & s \\ 1 & 2 & s \\ s & 3 & 9 \end{vmatrix} = 1(18 - 3s) - 1(9 - s^2) + s(3 - 2s) = -s^2 + 9 = (3-s)(3+s) \text{ 3 P.}$$

Vi har dermed at $|A| = 0$ når $s = \pm 3$. 3 P.

(c) Vi regner ut determinanten ved kofaktorutvikling langs første rad:

$$|A| = \begin{vmatrix} t & 1 & 4 \\ 1 & t & 4 \\ 1 & 4 & t \end{vmatrix} = t(t^2 - 16) - 1(t-4) + 4(4-t) = (t-4)\,[t(t+4) - 1 - 4]$$
$$= (t-4)(t^2 + 4t - 5) = (t-4)(t-1)(t+5) \text{ 3 P.}$$

Overgangen mellom de to siste uttrykkene på første linje gjøres ved å faktorisere ut $(t-4)$, som er en felles faktor i alle tre ledd. Vi har dermed at $|A| = 0$ når $t = 1, t = 4, t = -5$. 3 P.



Oppgave 5. 12 P.

(a) Siden $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, er $x = 1$ og $x = 2$ de vertikale asymptotene. 1 P. Polynomdivisjon gir $f(x) = x + 3 - 6/(x^2 - 3x + 2)$, og dermed har f en skrå asymptote L med likning $y = x + 3$. 2 P. Figuren er vist ovenfor. 3 P.

(b) Vi ser at f har nullpunkt gitt ved $x^3 - 7x = 0$, det vil si $x = 0$ og $x = \pm\sqrt{7}$. Området R i andre kvadrat begrenset av grafen til f og x-aksen finnes i området $-\sqrt{7} \leq x \leq 0$, og har areal gitt ved

$$\begin{aligned} A = \int_{-\sqrt{7}}^{0} f(x)\ \mathrm{d}x &= \int_{-\sqrt{7}}^{0} x + 3 - \frac{6}{(x-1)(x-2)}\ \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 + 3x\right]_{-\sqrt{7}}^{0} - \int_{-\sqrt{7}}^{0} \frac{6}{(x-1)(x-2)}\ \mathrm{d}x \quad 3\,\mathrm{P.} \end{aligned}$$

Det første leddet er gitt av

$$\left[\frac{1}{2}x^2 + 3x\right]_{-\sqrt{7}}^{0} = 0 - (7/2 - 3\sqrt{7}) = 3\sqrt{7} - 7/2$$

For å regne ut det siste integralet, bruker vi delbrøksoppspaltning, som gir

$$\frac{6}{x^2 - 3x + 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} \quad \Rightarrow \quad 6 = A(x-2) + B(x-1)$$

Vi finner konstantene A og B ved å sette inn $x = 1$ og $x = 2$, og dette gir $A = -6$ og $B = 6$. Dermed får vi

$$\int_{-\sqrt{7}}^{0} \frac{6}{(x-1)(x-2)}\ \mathrm{d}x = \int_{-\sqrt{7}}^{0} \frac{-6}{x-1} + \frac{6}{x-2}\ \mathrm{d}x = \left[-6\ln|x-1| + 6\ln|x-2|\ \right]_{-\sqrt{7}}^{0}$$

som gir

$$\left[6\ln\frac{|x-2|}{|x-1|}\right]_{-\sqrt{7}}^{0} = 6\ln(2) - 6\ln\frac{2+\sqrt{7}}{1+\sqrt{7}}$$

Dette betyr at arealet av området R gitt ved

$$A = 3\sqrt{7} - 7/2 - 6\ln(2) + 6\ln\frac{2+\sqrt{7}}{1+\sqrt{7}} \approx 1.73 \quad 3\,\mathrm{P.}$$

Oppgave 6. 6 P.

Vi regner først ut determinanten til koeffisientmatrisen A til det lineære systemet, ved å utvikle determinanten langs siste rad:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ a & 3 & 5 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = a(10-3a) + 1(3-2a) = -3a^2 + 8a + 3 = (3-a)(1+3a) \quad 1\,\text{P.}$$

Vi ser at for $a = 3$ og $a = -1/3$, så er $|A| = 0$, og systemet har ingen eller uendelig mange løsninger. For alle andre verdier av a, så er $|A| \neq 0$, og systemet har eksakt én løsning. 2 P. Vi ser først på tilfellet $a = 3$, og løser systemet ved Gauss eliminasjon:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & -6 & -8 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vi ser at systemet har uendelig mange løsninger for $a = 3$. 1 P. Vi ser så på tilfellet $a = -1/3$, og løser systemet ved Gauss eliminasjon. Vi multipliserer først alle rader med 3 og bytter første og siste rad:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1/3 & 1 \\ -1/3 & 3 & 5 & -1/3 \\ -1/3 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -1 & 3 \\ -1 & 9 & 15 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 9 \\ -1 & 9 & 15 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Deretter finner vi en trappeform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 9 \\ -1 & 9 & 15 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 9 & 12 & -10 \\ 0 & 6 & 8 & 30 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & -9 \\ 0 & 9 & 12 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 110/3 \end{array}\right)$$

Systemet har dermed ingen løsninger for $a = -1/3$. 1 P. Antall løsninger er dermed gitt ved

$$\begin{cases} \text{ingen løsninger,} & a = -1/3 \\ \text{uendelig mange løsninger,} & a = 3 \\ \text{eksakt én løsning,} & \text{ellers} \end{cases}$$

Vi finner så løsningen i de to siste tilfelellene, der systemet er konsistent: For $a = 3$ finner vi løsningene ved å bruke trappeformen vi fant tidligere. Den gir at z er fri, og at

$$-3y - 4z = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -4z/3 \quad \text{og} \quad x + 2y + 3z = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 1 - 3z - 2(-4z/3) = 1 - z/3$$

Dette gir løsninger $(x,y,z) = (1 - z/3, -4z/3, z)$ med z fri. For $a \neq 3$ og $a \neq -1/3$, er det eksakt én løsning, og vi finner den ved hjelp av Kramers regel:

$$|A_1(\mathbf{b})| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ a & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 33 - 11a \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{11(3-a)}{(3-a)(1+3a)} = \frac{11}{1+3a}$$

$$|A_2(\mathbf{b})| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & a & 5 \\ a & 3 & 1 \end{vmatrix} = -a^3 + 3a^2 + 5a - 15 \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{(3-a)^{(}a^2-5)}{(3-a)(1+3a)} = \frac{a^2-5}{1+3a}$$

$$|A_3(\mathbf{b})| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & 3 & a \\ a & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2a^2 - 9a + 9 \qquad \Rightarrow \qquad z = \frac{(3-a)(3-2a)}{(3-a)(1+3a)} = \frac{3-2a}{1+3a} \quad 1\,\text{P.}$$

Vi har i hvert tilfelle faktorisert teller og forkortet brøkene for å skrive løsningen enklest mulig.

Oppgave 7. 18 P.

(a) Vi har at

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} 6\,\text{P.}$$

(b) Vi regner ut determinanten $|A| = 1(-1) - 1(1) = -2$ ved kofaktorutvikling langs første rad. Dermed har vi at

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{6 P.}$$

(c) Vi har at

$$AB + BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{6 P.}$$

Oppgave 8. 18 P.

(a) Nåverdien av kontantstrømmen fra leie er

$$\int_0^\infty I(t)e^{-rt}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty 10\,e^{0.06t}\,e^{-0.10t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty 10\,e^{-0.04t}\,\mathrm{d}t \text{ 3 P.}$$
$$= \left[\frac{10}{-0.04}\,e^{-0.04t}\right]_0^\infty = \lim_{b\to\infty}\left[-250\,e^{-0.04t}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty} -250(e^{-0.04b} - 1) = 250 \text{ 3 P.}$$

(b) La $S(t)$ være nåverdien av salgssummen om vi selger eiendommen etter t år. Da har vi at

$$S(t) = V(t)e^{-rt} = 250\,e^{\sqrt{t}/5}\,e^{-0.10t} = 250\,e^{(2\sqrt{t}-t)/10} \text{ 1 P.}$$

For å finne ut når $S(t)$ er maksimal, deriverer vi denne funksjonen. Vi bruker $u = (2\sqrt{t} - t)/10$ som kjerne, og får

$$S'(t) = 250\,e^u \cdot u' = 250\,e^u \cdot \frac{1}{10}\left(\frac{2}{2\sqrt{t}} - 1\right) = 25\,e^u \cdot \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} \text{ 3 P.}$$

Dermed er $S'(t) = 0$ når $1 - \sqrt{t} = 0$, og dette gir $\sqrt{t} = 1$, eller $t = 1$. De andre faktorene i uttrykket for $S'(t)$ er positive, og $1 - \sqrt{t}$ skifter fortegn fra å være positivt til å bli negativt i $t = 1$. Dermed er $t = 1$ globalt maksimum for funksjonen $S(t)$. Vi kan også se dette ved å sette opp fortegnsskjema for $S'(t)$. Nåverdien av salgssummen er altså største mulig etter ett år. 2 P.

(c) Dersom vi leier ut eiendommen i perioden de første T årene, og deretter selger eiendommen, er samlet nåverdi

$$N(T) = \int_0^T I(t)e^{-rt}\,\mathrm{d}t + V(T)e^{-rT} \text{ 1 P.}$$

Vi har at det første leddet (nåverdien av leie) er

$$\int_0^T I(t)e^{-rt}\,\mathrm{d}t = \int_0^T 10\,e^{0.06t}\,e^{-0.10t}\,\mathrm{d}t = \int_0^T 10e^{-0.04t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{10}{-0.04}\,e^{-0.04t}\right]_0^T$$
$$= -250(e^{-0.04T} - 1) = 250(1 - e^{-0.04T})$$

og det andre leddet (nåverdi av salgssum) er

$$S(T) = 250\,e^{(2\sqrt{T}-T)/10}$$

Dermed er samlet nåverdi gitt ved

$$N(T) = 250(1 - e^{-0.04T}) + 250\,e^{(2\sqrt{T}-T)/10} = 250\left(1 - e^{-0.04T} + e^{(2\sqrt{T}-T)/10}\right) \text{ 3 P.}$$

Vi har at samlet nåverdi etter 0, 1, 2 og 3 år er:

a) $N(0) = 250(1 - 1 + 1) = 250$

b) $N(1) = 250(1 - e^{-0.04} + e^{0.10}) \approx 286.1$

c) $N(2) = 250(1 - e^{-0.08} + e^{(\sqrt{2}-1)/5}) \approx 290.8$

d) $N(3) = 250(1 - e^{-0.12} + e^{(2\sqrt{3}-3)/10}) \approx 290.1$ 1 P.

Det ser ut som om maksimal samlet nåverdi inntreffer etter mellom 2 og 3 år. 1 P. Vi kan finne maksimal nåverdi ved for eksempel å bruke Wolfram Alpha, som gir maksimal samlet nåverdi ved å selge etter $T = 2.29$ år.

Oppgave 9. 12 P.

Vi finner fram til gevinst per aksje i hvert selskap for hvert av de tre scenariene ved å regne trekke fra kjøpskurs, se tabell. Vi bruker dette til å uttrykke avkastningen (gevinsten) R_i ved hjelp av x,y,z, som gir tre lineære likninger. I tillegg har vi budsjettbetingelsen $100x + 125y + 284z = C$, som gir at samlet kjøpssum for aksjene lik kapitalen $C = 1.500.000$ kr som vi har tilgjengelig. Vi finner dermed

	Gevinst A	Gevinst B	Gevinst C
Scenario 1	-25	25	-150
Scenario 2	50	-75	120
Scenario 3	20	15	20

følgende lineære system, og den tilsvarende utvidede matrise:

$$\begin{array}{rcrcrcl} -25x & + & 25y & - & 150z & = & R_1 \\ 50x & - & 75y & + & 120z & = & R_2 \\ 20x & + & 15y & + & 20z & = & R_3 \\ 100x & + & 125y & + & 284z & = & C \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{rrr|l} -25 & 25 & -150 & R_1 \\ 50 & -75 & 120 & R_2 \\ 20 & 15 & 20 & R_3 \\ 100 & 125 & 284 & C \end{array}\right)$$

(a) Vi løser første dette systemet når $(R_1, R_2, R_3) = (1.000.000, -2.000.000, 200.000)$. Dette gir trappeformen (etter endel radoperasjoner):

$$\left(\begin{array}{rrr|l} -25 & 25 & -150 & R_1 \\ 50 & -75 & 120 & R_2 \\ 20 & 15 & 20 & R_3 \\ 100 & 125 & 284 & C \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|l} -25 & 25 & -150 & R_1 \\ 0 & -25 & -180 & R_2 + 2R_1 \\ 0 & 35 & -100 & R_3 + 0.8R_1 \\ 0 & 225 & -316 & C + 4R_1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{rrr|l} -25 & 25 & -150 & R_1 \\ 0 & -25 & -180 & R_2 + 2R_1 \\ 0 & 0 & -352 & R_3 + 1.4R_2 + 3.6R_1 \\ 0 & 0 & -1936 & C + 9R_2 + 22R_1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{rrr|l} -25 & 25 & -150 & R_1 \\ 0 & -25 & -180 & R_2 + 2R_1 \\ 0 & 0 & -352 & R_3 + 1.4R_2 + 3.6R_1 \\ 0 & 0 & 0 & C - 5.5R_3 + 1.3R_2 + 2.2R_1 \end{array}\right) \text{ 3 P.}$$

Vi ser at når $C = 1.500.000$ og $(R_1, R_2, R_3) = (1.000.000, -2.000.000, 200.000)$, så er uttrykket $C + 2.2R_1 + 1.3R_2 - 5.5R_3 = 0$. Derfor har systemet én entydig løsning, og det fins en portefølje med ønsket egenskap. 1 P. Vi finner porteføljen ved å løse systemet

$$\begin{array}{rcrcrcr} -25x & + & 25y & - & 150z & = & 1.000.000 \\ & - & 25y & - & 180z & = & 0 \\ & & & - & 352z & = & 1.000.000 \end{array}$$

ved baklengs substitusjon, og det gir

$$(x,y,z) = (-2.500, 20.454\,{}^{6}/_{11}, -2.840\,{}^{10}/_{11}) \text{ 2 P.}$$

Vi bør altså kjøpe -2.500 aksjer i selskap A, $20.454\,{}^{6}/_{11}$ aksjer i selskap B, og $-2.840\,{}^{10}/_{11}$ aksjer i selskap C for å realisere den gitte avkastningen.

(b) For å finne alle mulige avkastningstripler (R_1, R_2, R_3) bruker vi samme lineære system som over, og får samme trappeform. De mulige triplene er derfor de som oppfyller

$$C + 2.2R_1 + 1.3R_2 - 5.5R_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad -2.2R_1 - 1.3R_2 + 5.5R_3 = 1.500.000 \text{ 2 P.}$$

Det finnes mange løsninger av denne likningen med $R_1, R_2, R_3 > 0$. Vi velger løsningen med $R_1 = R_2 = R_3$ (samme gevinst i alle scenarier gir minst mulig usikkerhet). Dette gir

$$2R_1 = 1.500.000 \quad \Rightarrow \quad R_1 = 750.000$$

Dette valget svarer altså til avkastningene $R_1 = R_2 = R_3 = 750.000$. 2 P. For å finne hvilken portefølje som realiserer denne avkastningen, løser vi systemet

$$\begin{array}{rcrcrcr} -25x & + & 25y & - & 150z & = & 750.000 \\ & - & 25y & - & 180z & = & 2.250.000 \\ & & & - & 352z & = & 4.500.000 \end{array}$$

ved baklengs substitusjon. Dette gir

$$(x,y,z) = (48.750, 2.045\,{}^5\!/\!{}_{11}, -12.784\,{}^1\!/\!{}_{11}) \text{ 2 P.}$$

Vi bør altså kjøpe 48.750 aksjer i selskap A, $2.045\,{}^5\!/\!{}_{11}$ aksjer i selskap B, og $-12.784\,{}^1\!/\!{}_{11}$ aksjer i selskap C for å realisere denne avkastningen.