EKSAMENSOPPGAVE - Fagoppgave

MET 11806
Matematikk for siviløkonomer

Institutt for Samfunnsøkonomi

Utlevering:	15.03.2021	Kl. 09.00
Innlevering:	22.03.2021	Kl. 12.00

Vekt:	Bestått / Ikke bestått
Antall sider i oppgaven:	3 inkl. forsiden
Antall vedleggsfiler til oppgaven:	0
Oppgaven besvares:	Individuelt

Lengde på besvarelse:	Ingen begrensning. ekskl. vedlegg
Maks. ant. vedleggsfiler til besvarelsen:	0
Tillatte filtyper for besvarelse:	pdf

Oppgavesettet er på to sider. Alle underpunkter vektes likt. Bestått krever minst 60% score. **Alle svar skal begrunnes. Det blir lagt vekt på at framgangsmåte og resultat presenteres klart, presist og kortfattet når besvarelsen evalueres.**

Denne oppgaven skal leveres digitalt, som én pdf-fil. Skriv gjerne for hånd (nesten alltid best) og skann inn besvarelsen. Sjekk at resultatet er lett å lese, blyantskrift kan gi dårlige filer. For mer informasjon, se `https://portal.bi.no/eksamen-og-oppgave/digital-eksamen/digital-innlevering/`.

Oppgave 1.
Regn ut de ubestemte integralene:

a) $\displaystyle\int 10x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int 4x(1-x^2)\,\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int 12(1+4x)^2\,\mathrm{d}x$

Oppgave 2.
Bruk Gauss-eliminasjon til å løse de lineære systemene. Vis elementære radoperasjoner, marker pivotposisjonene i trappeformen, og angi antall løsninger.

$$a)\quad \begin{array}{rcrcrcr} x &+& 2y &-& z &=& 3 \\ 5x &+& 8y &-& 2z &=& 23 \\ 2x &+& 6y &-& 5z &=& 6 \end{array} \qquad b)\quad \begin{array}{rcrcrcrcr} x &+& 2y &+& 4z &+& w &=& 11 \\ 4x &+& 9y &+& 12z &-& w &=& 40 \\ 5x &+& 10y &+& 16z &+& w &=& 51 \end{array}$$

Oppgave 3.
Regn ut de ubestemte integralene:

a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \frac{1-x}{1-4x^2}\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int \frac{3(\ln x)^2}{x}\,\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int 6x^2\,e^{-x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

Oppgave 4.
Regn ut determinanten $|A|$, og avgjør når $|A| = 0$:

a) $A = \begin{pmatrix} 6 & 2a \\ a & 3 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & s \\ 1 & 2 & s \\ s & 3 & 9 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 4 \\ 1 & t & 4 \\ 1 & 4 & t \end{pmatrix}$

Oppgave 5.
Vi ser på funksjonen $f(x) = \dfrac{x^3-7x}{x^2-3x+2}$.

(a) Bestem asymptotene til funksjonen f, og tegn figur.
(b) Vi lar R være området i andre kvadrant avgrenset av grafen til f og x-aksen. Tegn inn området R på figuren, og regn ut arealet til R.

Oppgave 6.
Avgjør hvor mange løsninger det lineære systemet har for ulike verdier av parameteren a, og finn alle løsninger i tilfellene der systemet er konsistent:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x &+& 2y &+& az &=& 1 \\ ax &+& 3y &+& 5z &=& a \\ ax && &+& z &=& 3 \end{array}$$

Oppgave 7.
Regn ut følgende uttrykk når matrisene A og B er gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) A^2 b) A^{-1} c) $AB + BA$

Oppgave 8.
Vi kjøper en eiendom for 250 millioner kroner. Vi antar at verdien $V(t)$ av eiendommen (i millioner kroner) er gitt ved

$$V(t) = 250\, e^{\sqrt{t}/5}$$

etter t år. Dersom vi velger å leie ut eiendommen, regner vi med å motta en netto inntektstrøm $I(t)$ for utleie av eiendommen (i millioner kroner per år). Vi regner dette som en kontinuerlig inntektstrøm, og antar at den er gitt ved

$$I(t) = 10\, e^{0.06t}$$

etter t år. Vi bruker kontinuerlig diskontering når vi regner nåverdi, med diskonteringsrente $r = 10\%$.

(a) Finn nåverdien til inntektstrømmen vi mottar om vi leier ut eiendommen i all framtid.
(b) Vi vurderer å selge eiendommen på et tidspunkt i framtiden. Når er nåverdien av salgssummen størst mulig? Vi regner med at salgssummen er lik eiendommens verdi på det gitte tidspunktet.
(c) Anta at vi leier ut eiendommen i en periode på T år, og deretter selger eiendommen. Skriv ned et uttrykk for samlet nåverdi $N(T)$ av leie og salgssum, og regn ut $N(T)$ når
(i) $T = 0$ (ii) $T = 1$ (iii) $T = 2$ (iv) $T = 3$
Når ser det ut til å være optimalt å selge eiendommen?

Oppgave 9.
Du har 1.500.000 kr og skal investere i en aksjeportefølje. Du kan velge en kombinasjon av selskapene A, B, C med pris $p_A = 100$ kr, $p_B = 125$ kr og $p_C = 284$ kr per aksje på investeringstidspunktet. Vi antar at på et gitt tidspunkt i framtiden, vil et av tre scenarier slå til. Prisene på aksjene i disse scenariene er gitt i tabellen nedenfor. Vi skriver x, y, z for antall aksjer du kjøper i hvert av de tre

	Pris A	Pris B	Pris C
Kjøpskurs	100	125	284
Scenario 1	75	150	134
Scenario 2	150	50	404
Scenario 3	120	140	304

selskapene og går for enkelhets skyld ut i fra x,y,z kan være vilkårlige reelle tall. Vi tillater altså å kjøpe et negativt antall aksjer (short-salg), og antall aksjer trenger ikke være heltall.

(a) Vi skriver R_1, R_2 og R_3 for avkastningen til porteføljen i de tre scenariene. Er det mulig å velge porteføljen slik at $(R_1, R_2, R_3) = (1.000.000, -2.000.000, 200.000)$? Hvor mange aksjer må vi da kjøpe i hvert av de tre selskapene?
(b) Beskriv alle talltripler (R_1,R_2,R_3) av mulige avkastninger i de tre scenariene. Finnes det noen porteføljer slik at $R_1, R_2, R_3 > 0$ (garantert gevinst i alle scenarier)? Hvis ja, spesifiser en slik portefølje (antall aksjer du kjøper i hvert selskap), og de tilhørende avkastningene.