Fagoppgave	MET 11806 Matematikk for siviløkonomer
Innleveringsfrist	20. mars 2023 kl 1200

Oppgavesettet er på to sider. Alle underpunkter vektes likt. Bestått krever minst 60% score. Alle svar skal begrunnes. Oppgaven skal leveres digitalt, som én pdf-fil.

Oppgave 1.
Regn ut:

a) $\displaystyle\int_0^7 x^2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_1^2 \ln(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{6}{x^2-9}\,\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_{-1}^0 x\sqrt{-x}\,\mathrm{d}x$ f) $\displaystyle\int_{-1}^1 x\sqrt{|x|}\,\mathrm{d}x$ g) $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$

Oppgave 2.
Parabelen P skjærer x-aksen i $x = 2 \pm \sqrt{5}$ og har et topp-punkt med $y = 5$. Hyperbelen H har asymptoter $x = 0$ og $y = 0$, og skjærer P i $x = 1$.

a) Finn likningen til parabelen P og til hyperbelen H, og tegn inn P og H i samme koordinatsystem.

b) Finn arealet av området i første kvadrant som er begrenset av P og H.

Oppgave 3.
Vi velger den kontinuerlige funksjonen $f(t) = 100 \cdot e^{\sqrt{t}}$ som modell for en kontinuerlig kontantstrøm (i millioner kr per år) etter t år. Finn samlet kontanstrøm de første 25 årene, og sett opp et uttrykk for nåverdien av denne kontantstrømmen når vi bruker diskonteringsrente r.

Oppgave 4.
Bruk Gauss-eliminasjon til å løse det lineære systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Vis elementære radoperasjoner, marker pivot-posisjonene i trappeformen, og angi antall løsninger.

a) $(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 8 & 2 & 7 \\ 5 & 5 & 0 & -17 & 12 \end{array}\right)$ b) $(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 13 \end{array}\right)$

Oppgave 5.
Det lineære systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 2 & a & 3 \\ 2 & 3 & a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

der a er en parameter.

a) Regn ut $|A|$.

b) Finn A^{-1} når $a = 0$, og bruk dette til å løse det lineære systemet i dette tilfellet.

c) Bestem alle verdier av a slik at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en entydig løsning.

d) Finn alle løsninger av det lineære systemet i de tilfellene hvor det er uendelig mange løsninger.

Oppgave 6.
Vi ser på følgende 3-vektorer:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

a) Skriv vektoren $\mathbf{v}_3$ som en lineær-kombinasjon av vektorene $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ hvis det er mulig.

b) Bestem alle verdier av a,b,c slik at $\mathbf{w}$ er en lineærkombinasjon av vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ og $\mathbf{v}_4$.

c) Bestem alle vektorer $\mathbf{w}$ slik at $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}_2$.

Oppgave 7.
Løs matriselikningen $XA = AX$ for X når

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 8.
Vi ser på funksjonen $f(x,y) = x^2 - 4xy + 5y^2 - 4x + 4y + 1$.

a) Finn eventuelle stasjonære punkter for f og klassifiser disse.

b) Avgjør om f har maksimums- eller minimumsverdier.

Oppgave 9.
Vi ser på funksjonen $f(x,y) = x^2y^3 + y^2 - 2y + 1$.

a) Finn eventuelle stasjonære punkter for f og klassifiser disse.

b) Avgjør om f har maksimums- eller minimumsverdier.