EKSAMENSOPPGAVE - Skriftlig eksamen

MET 11807
Matematikk for siviløkonomer

Institutt for Samfunnsøkonomi

Utlevering:	17.12.2019	Kl. 09.00
Innlevering:	17.12.2019	Kl. 14.00

Vekt:	80% av MET 1180
Antall sider i oppgaven:	4 inkl. forsiden
Innføringsark:	Ruter
Tillatte hjelpemidler:	BI-definert eksamenskalkulator. Enkel kalkulator.
Kontinuasjonstype	Ordinær

Eksamen	MET 11807 Matematikk for siviløkonomer
Dato	17. desember 2019 kl 0900 - 1400

Eksamensoppgaven består av 15 delspørsmål med samme vekt, som har maksimal score 6p hver og totalt har maksimal score 90p (100%). I tillegg inneholder eksamensoppgaven et bonus-spørsmål som man ikke trenger besvare, men som kan gi opptil 6p ekstra score.

Alle svar skal begrunnes. Når besvarelsen evalueres, blir det lagt vekt på at framgangsmåte og resultat presenteres så klart, presist og kortfattet som mulig.

Oppgave 1.
Vi betrakter det lineære systemet $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, hvor

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & -1 \\ -1 & 2 & a \\ a & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og a er en parameter.

a) **(6p)** Bruk Gauss-eliminasjon til å løse det lineære systemet når $a = -1$. Marker pivot-posisjonene.

b) **(6p)** Regn ut $\det(A)$, og bestem alle verdier av a slik at $\det(A) = 0$.

c) **(6p)** Finn A^{-1} når $a = 0$.

Oppgave 2.
Vi ser på funksjonen f definert ved $f(x) = \dfrac{x^2 - 9x + 5}{4 - x}$.

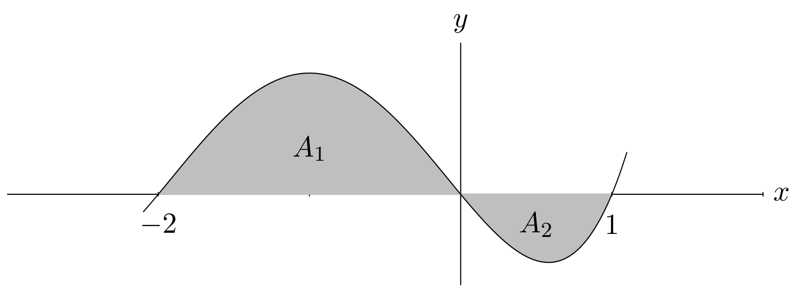
a) **(6p)** Finn asymptotene til f.

b) **(6p)** Avgjør når $f(x) > 0$.

c) **(6p)** Bestem når f er konveks og når f er konkav.

Oppgave 3.
Regn ut disse integralene:

a) **(6p)** $\displaystyle\int 30x\sqrt{x}\ \mathrm{d}x$ b) **(6p)** $\displaystyle\int xe^{-x}\ \mathrm{d}x$ c) **(6p)** $\displaystyle\int \frac{6-3x}{4-9x^2}\ \mathrm{d}x$



d) **(6p)** Grafen til en funksjon f er vist i figuren ovenfor. Bestem arealet A_1 når det er oppgitt at arealet $A_2 = 22/15$ og at

$$\int_{-2}^{1} f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{18}{5}$$

Oppgave 4.

a) **(6p)** En investering på 40 000 000 kr antas å gi en tilbakebetaling på 3 200 000 kr etter ett år, og deretter årlige betalinger som øker hvert år. Definer internrenten til prosjektet, og forklar hvorfor den er minst 8%.

b) **(6p)** Et forbrukslån på 200 000 kr gis som et annuitetslån over 5 år med nominell rente 24% og terminlengde lik et kvartal. Etter to år bestemmer du deg for å innfri hele lånet, og betaler akkurat så mye som skal til for å innfri lånet istedet for den vanlige kvartalsbeløpet. Hvor mye må du betale?

Oppgave 5.
Vi ser på funksjonen definert ved $f(x,y) = 4x^2 + 9y^2 - x^2y^2$.

a) **(6p)** Finn alle stasjonære punkt for f.

b) **(6p)** Klassifiser de stasjonære punktene til f.

c) **(6p)** Løs optimeringsproblemet: $\min f(x,y) = 4x^2 + 9y^2 - x^2y^2$ når $x^2 + y^2 = 13$.

d) **Bonus (6p)** Skisser nivåkurven $f(x,y) = 16$ og dens asymptoter.

Formelsamling

1 Finansmatematikk

Geometriske rekker. En endelig geometrisk rekke har sum

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-k^n}{1-k} = a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k-1}$$

og en uendelige geometrisk rekke har sum

$$S = a_1 \cdot \frac{1}{1-k} \quad \text{når } |k| < 1$$

Nåverdier. Nåverdien K_0 til en innbetaling K_n er henholdsvis

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n} \quad \text{og} \quad K_0 = \frac{K_n}{e^{rn}}$$

ved diskret og kontinuerlig diskonteringsrente.

2 Integrasjon

Integrasjonsmetoder.

a) Delvis integrasjon:

$$\int u'v \,\mathrm{d}x = uv - \int uv' \,\mathrm{d}x$$

b) Substitusjon:

$$\int f(u)u' \,\mathrm{d}x = \int f(u) \,\mathrm{d}u$$

c) Delbrøksoppspaltning:

$$\int \frac{px+q}{(x-a)(x-b)} = \int \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \right) \mathrm{d}x$$

Areal. Regionen gitt ved $f(x) \leq y \leq g(x)$ for $a \leq x \leq b$ har areal

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x)) \,\mathrm{d}x$$

3 Lineær algebra

Cramers regel. Et lineært system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ der $|A| \neq 0$ har en entydig løsning gitt ved

$$x_1 = \frac{|A_1(\mathbf{b})|}{|A|} \quad x_2 = \frac{|A_2(\mathbf{b})|}{|A|} \quad \ldots \quad x_n = \frac{|A_n(\mathbf{b})|}{|A|}$$

der $A_i(\mathbf{b})$ er matrisen som framkommer ved å bytte ut kolonne i fra matrisen A med $\mathbf{b}$.

4 Funksjoner i flere variable

Annenderivert-testen. Et stasjonært punkt (x^*, y^*) for funksjonen $f(x, y)$ er et

a) lokalt minimum om $A > 0$ og $AC - B^2 > 0$
b) lokalt maksimum om $A < 0$ og $AC - B^2 > 0$
c) sadelpunkt om $AC - B^2 < 0$

når vi setter $A = f''_{xx}(x^*, y^*)$, $B = f''_{xy}(x^*, y^*)$ og $C = f''_{yy}(x^*, y^*)$.

Nivåkurver. På nivåkurven $f(x, y) = c$ er den deriverte $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ gitt ved

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

Totalderivasjon. Når $z = f(x, y)$, og vi har $x = x(t)$ og $y = y(t)$, så er den totalderiverte

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$