Løsning	MET 1180 Matematikk for siviløkonomer
Dato	19. juni 2020 kl 0900 - 1600

Oppgave 1.

a) Stigningstallet til tangenten for f i $x = 1$ er gitt ved $f'(1)$. Vi leser av fra grafen at $f'(1) = 0$. Tilsvarende leser vi av fra grafen at $g'(1) = 2$.

b) Vi ser fra grafen til f' at $f'(x) < 0$ når $x < 1$ og $f'(x) > 0$ når $x > 1$. Det betyr at f er avtagende for $x \leq 1$ og voksende for $x \geq 1$, og dermed er $x = 1$ et minimumspunkt for f. Tilsvarende ser vi fra grafen til g' at $g'(x) \geq 0$ for alle x, og g er derfor en voksende funksjon. Dermed er $x = -1$ et minimumspunkt for g.

c) I b) fant vi monotoniegenskapene til f og g, det vil si når f og g er voksende og avtagende. Vi finner at g har en omvendt funksjon siden g er voksende i hele definisjonsområdet, mens f ikke har en omvendt funksjon, siden f skifter fra å være avtagende til å være voksende i $x = 1$.

Oppgave 2.

a) Vi skriver ned den utvidede matrisen til systemet for $a = 2$, markerer første pivot-posisjon, og legger siste rad til den første for å få første pivot lik 1 (som gjør regningen enklere). Dernest bruker vi første pivot til å eliminere tallene i posisjonene under:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

Vi markerer pivotposisjonen i andre rad, og legger til 2 ganger siste rad i andre rad for å få andre pivot lik 1. Så bruker vi andre pivot til å eliminere tallet i posisjonen under:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & 5 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 6 \\ 0 & -2 & 5 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 17 & 17 \end{array}\right)$$

Resultatet er en trappeform, hvor vi har markert alle pivotposisjoner. Det er dermed nøyaktig én løsning, og vi finner løsningene ved baklengs substitusjon:

$$\begin{aligned} 17z &= 17 & & & z &= 1 \\ y + 6z &= 6 & \Rightarrow \quad & y = 6 - 6(1) & y &= 0 \\ x + z &= 2 & \Rightarrow \quad & x = 2 - (1) & x &= 1 \end{aligned}$$

Løsningen er altså $(x,y,z) = (1,0,1)$.

b) Vi regner ut determinanten ved kofaktorutvikling langs første rad:

$$\begin{aligned} |A| = \begin{vmatrix} 3 & a & -2 \\ a & a^2+1 & -a \\ -2 & -a & 3 \end{vmatrix} &= 3(3(a^2+1) - a^2) - a(3a - 2a) + (-2)(-a^2 + 2(a^2+1)) \\ &= 6a^2 + 9 - a^2 - 2a^2 - 4 = 3a^2 + 5 \end{aligned}$$

Systemet har nøyaktig én løsning når $\det(A) \neq 0$, og dette er tilfellet for alle verdier av a siden $\det(A) = 3a^2 + 5 = 0$ ikke har noen løsninger.

c) Når $a = 0$ er $|A| = 3(0) + 5 = 5$. Dermed har vi at den inverse matrisen er gitt ved

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

d) Fra a) har vi at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har løsning $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ når $a = 2$. Dermed er $A\mathbf{b} = \mathbf{b}$, og gjentar vi dette får vi $A^2\mathbf{b} = A(A\mathbf{b}) = A\mathbf{b} = \mathbf{b}$, $A^3\mathbf{b} = A(A^2\mathbf{b}) = A\mathbf{b} = \mathbf{b}$, og dette mønsteret forsetter. Derfor er $A^n\mathbf{b} = \mathbf{b}$ for alle $n \geq 1$.

Oppgave 3.

a) Vi ser fra grafen at $f(x) \to \pm\infty$ når $x \to 2$, dermed er $x = 2$ en vertikal asymptote for f. Vi ser også at det er en rett linje $y = L(x)$ slik at $f(x) - L(x) \to 0$ når $x \to \pm\infty$ (det vil si at grafen til f nærmer seg denne linjen når $x \to \pm\infty$), og vi leser av fra grafen at den rette linjen er gitt ved $L(x) = -x - 2$ siden linjen skjærer y-aksen i $y = -2$ og har stigningstall -1. Dermed er $y = -x - 2$ skrå asymptote for f.

b) Funksjonsuttrykket til f har kvadratisk teller og lineær nevner, og fra asymptotene til f vet vi dermed at funksjonsuttrykket må være på formen

$$f(x) = -x - 2 + \frac{C}{x-2}$$

for en konstant C. Vi leser av punktet $(x,y) = (1,-2)$ på grafen til f, og bruker dette til å finne C. Det gir likningen $f(1) = -1 - 2 + C/(1-2) = -3 - C = -2$, det vil si at $C = -1$. Dermed er funksjonsuttrykket gitt ved

$$f(x) = -x - 2 + \frac{-1}{x-2} = \frac{(-x-2)(x-2) - 1}{x-2} = \frac{3-x^2}{x-2}$$

Vi bestemmer $f'(x)$ med utgangspunkt i det første uttrykket, og fra kjerneregelen får vi

$$f'(x) = -1 - 1(-1)(x-2)^{-2} \cdot 1 = -1 + \frac{1}{(x-2)^2}$$

c) Eventuelle globale maksimums- og minimumspunkter må være stasjonære punkter for f. Vi finner to stasjonære punkter:

$$f'(x) = -1 + \frac{1}{(x-2)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-2)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \pm 1$$

Vi finner igjen disse to punktene på grafen til f, og ser at $x = 3$ er et lokalt maksimum men ikke globalt maksimum, og at $x = 1$ er et lokalt minimum men ikke globalt minimum. Derfor har ikke f globale maksima eller minima.

Oppgave 4.

a) Vi multipliserer ut polynomet og bruker potensregelen:

$$\int x(1-x)^2 \, dx = \int x(1 - 2x + x^2) \, dx = \int x - 2x^2 + x^3 \, dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + C$$

b) Vi bruker substitusjonen $u = 1 - x^2$, som gir $du = -2x \, dx$, og dermed blir integralet

$$\int \frac{x}{1-x^2} \, dx = \int \frac{x}{u} \cdot \frac{du}{-2x} = \int \frac{1}{-2u} \, du = -\frac{1}{2} \ln|u| + C = -\frac{1}{2} \ln|1-x^2| + C$$

c) Vi bruker substitusjonen $u = 1 - \sqrt{x}$, som gir $du = -\,dx/(2\sqrt{x})$, og dermed blir integralet

$$\int \frac{x}{(1-\sqrt{x})^2} \, dx = \int \frac{x}{u^2} \cdot (-2\sqrt{x}) \, du = \int \frac{-2(\sqrt{x})^3}{u^2} \, du = -2 \int \frac{(1-u)^3}{u^2} \, du$$

siden $u = 1 - \sqrt{x}$ gir $\sqrt{x} = 1 - u$. Vi multipliserer ut $(1-u)^3 = 1 - 3u + 3u^2 - u^3$. Ved å integrere ledd for ledd med potensregelen, får vi

$$\int \frac{(1 - 3u + 3u^2 - u^3)}{u^2} \, du = \int \frac{1}{u^2} - \frac{3}{u} + 3 - u \, du = -\frac{1}{u} - 3\ln|u| + 3u - \frac{u^2}{2} + C$$

Dermed får vi at integralet blir

$$\int \frac{x}{(1-\sqrt{x})^2} \, dx = \frac{2}{1-\sqrt{x}} + 6\ln|1-\sqrt{x}| - 6(1-\sqrt{x}) + (1-\sqrt{x})^2 + C$$

d) Vi skal maksimere funksjonen $A(a) = \int_{-4}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x$ for $-4 \leq a \leq 3$. Vi vet fra integrasjonsteori at $A'(a) = f(a)$, og de stasjonære punktene for A er derfor nullpunktene til f, det vil si $a = -3$, $a = -1$ og $a = 2$. Siden $A'(a) = f(a)$ skifter fortegn fra negativt til positivt i $a = -1$, er dette et lokalt minimum. Tilsvarende skifter $A'(a) = f(a)$ fortegn fra positivt til negativt i $a = -3$ og $a = 2$, derfor er disse punktene lokale maksima. For å sammenlikne $A(-3)$ og $A(2)$, ser vi på integralet

$$\int_{-3}^{2} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-3}^{-1} f(x)\ \mathrm{d}x + \int_{-1}^{-2} f(x)\ \mathrm{d}x$$

Det har positiv verdi siden arelet over grafen i $[-3, -1]$ er mindre enn arealet under grafen i $[-1{,}2]$. Dermed er $A(2) > A(-3)$, og vi ser at randpunktene $a = -4$ eller $a = 3$ ikke gir maksimum. Vi konkluderere at $a = 2$ er maksimumspunktet, og dermed gir $a = 2$ den største verdien av integralet.

Oppgave 5.

a) Vi har at $f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (x+1)e^x$. Fortegnslinjen til $f'(x)$ viser at f er avtagende for $x \leq -1$ og voksende for $x \geq -1$, og $f_{\text{min}} = f(-1) = -e^{-1} = -1/e \approx -0.37$ er derfor den globale minimumsverdien for f. Siden $-1 < f_{\text{min}} \approx -0.37$, har $f(x) = -1$ ingen løsning.

b) Siden $W = f^{-1}$ så er $W(f(x)) = x$. Derivasjon med kjerneregelen gir $W'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$. Siden $f'(x) > 0$ for $x > -1$ fra a) så må $W'(f(x)) > 0$ for $x > -1$. Altså er W en voksende funksjon.

Oppgave 6.

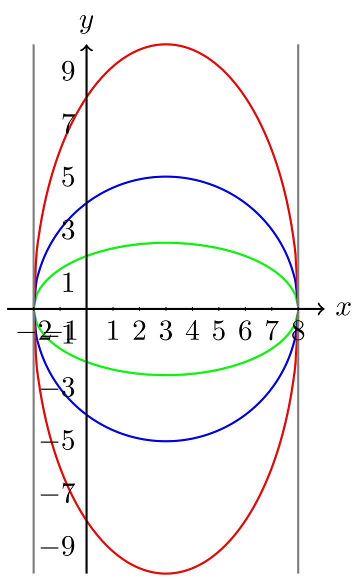
a) Vi fullfører kvadratet for å skrive om og forenkle likningen $4x^2 - 24x + t^2y^2 = 64$ for C:

$$\begin{aligned} 4(x^2 - 6x + 9) + t^2y^2 &= 64 + 4 \cdot 9 \\ 4(x-3)^2 + t^2y^2 &= 100 \\ \frac{(x-3)^2}{25} + \frac{t^2y^2}{100} &= 1 \end{aligned}$$

Hvis $t \neq 0$, så er C en ellipse med senter $(3{,}0)$ og halvakser $a = 5$ og $b = \sqrt{100/t^2} = 10/|t|$. For $t = \pm 2$ er C spesielt en sirkel. Hvis $t = 0$, så består C av de to rette linjene $x = -2$ og $x = 8$:

$$(x-3)^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad x - 3 = \pm 5 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \pm 5$$

Skisse av C for $t = 0$ (grå), $t = \pm 1$ (rød), $t = \pm 2$ (blå) og $t = \pm 4$ (grønn) er vist i Figur 1.



Figur 1. Kurven C for $t = 0$, $t = \pm 1$, $t = \pm 2$, og $t = \pm 4$

b) Vi finner de partiellderiverte til $f(x,y) = xy$, som er gitt ved $f'_x = y$ og $f'_y = x$. Førsteordensbetingelsene er $f'_x = f'_y = 0$, og dette gir det stasjonære punktet $(x,y) = (0,0)$. Andreordens partiellderiverte og Hesse-matrisen er gitt ved

$$H(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

For $(x,y) = (0,0)$ er det $H(f) = -1 < 0$. Andrederivert-testen gir derfor at (0,0) er et sadelpunkt.

c) Bibetingelsen $4x^2 - 24x + 16y^2 = 64$ er kurven C for $t = \pm 4$. Siden dette er en ellipse, så er den begrenset, og problemet har en maksimumsverdi ved ekstremverdisetningen. Vi ser også at det ikke er noen punkter med degenerert bibetingelse siden bibetingelsen gir en ellipse. Derfor må maksimuspunktene være ordinære kandidatpunkt. Vi finner disse ved Lagranges metode: Lagrange-funksjonen er $\mathcal{L} = xy - \lambda(4x^2 - 24x + 16y^2)$, og Lagrange-betingelsene er førsteordensbetingelsene samt bibetingelsen, gitt ved

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_x &= y - \lambda(8x - 24) = 0 \\ \mathcal{L}'_y &= x - \lambda(32y) = 0 \\ 4x^2 - 24x + 16y^2 &= 64 \end{aligned}$$

Vi løser andre likning for λ, og setter inn i første likning. Vi får da

$$\lambda = \frac{x}{32y} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x}{32y}(8x - 24)$$

Før vi går videre, ser vi at vi kan miste løsninger med $y = 0$ når vi deler på y, og vi sjekker dette: Hvis $y = 0$, så er $x = \lambda(32y) = 0$, og $(x,y) = (0,0)$ passer ikke i bibetingelsen. Det er derfor ingen løsninger med $y = 0$, og vi går videre med likningen vi fant ovenfor. Multiplikasjon med fellesnevner gir $32y^2 = x(8x - 24) = 8x(x - 3)$, eller $16y^2 = 4x(x - 3)$. Innsatt i bibetingelsen gir dette $4x^2 - 24x + 4x(x - 3) = 64$, som kan skrives $8x^2 - 36x - 64 = 0$ eller $2x^2 - 9x - 16 = 0$. Vi får dermed løsningene

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 128}}{4} = \frac{9 \pm \sqrt{209}}{4}$$

Med tilnærmingsverdier gir dette løsningene $x_1 \approx 5.864$ og $x_2 \approx -1.364$. For hver løsning for x, finner vi to løsninger for y ved å bruke at $16y^2 = 4x(x - 3)$. Vi får

$$y^2 = \frac{x^2 - 3x}{4} \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{x^2 - 3x}/2$$

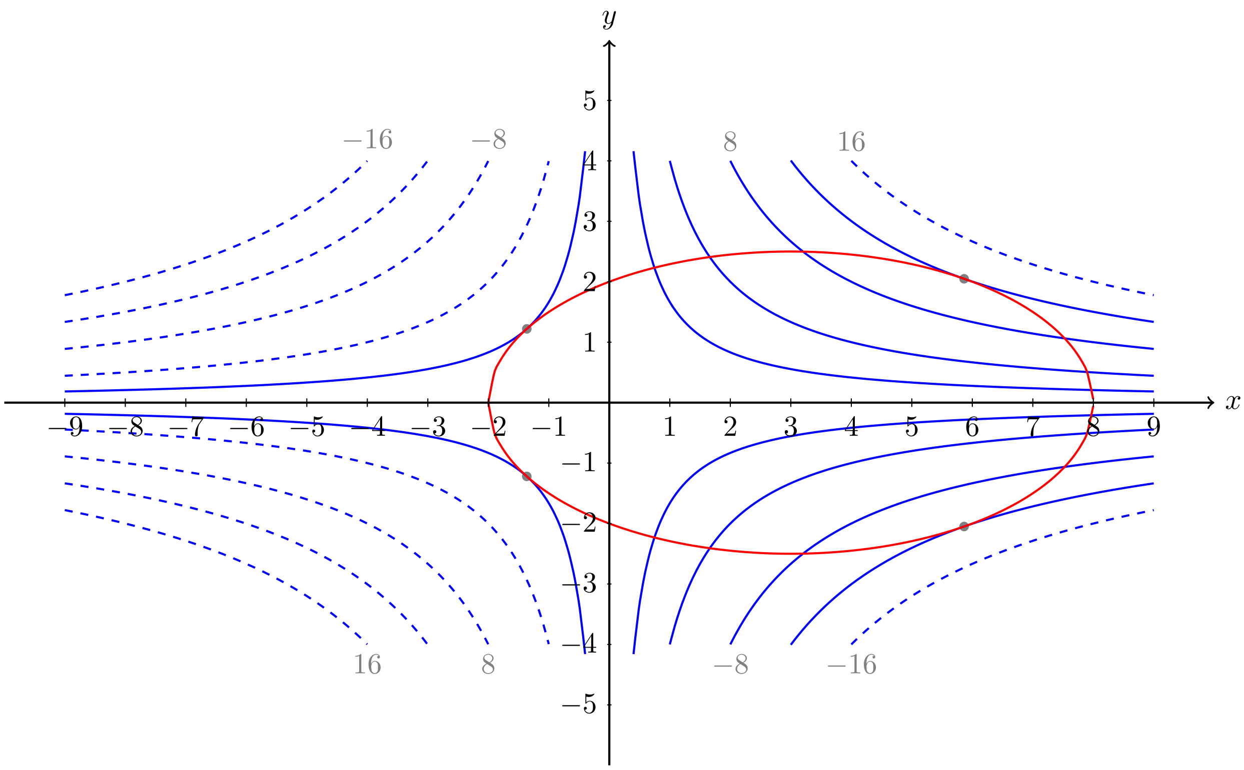
Når $x = x_1$ gir dette $y \approx \pm 2.049$, og når $x = x_2$ gir dette $y \approx \pm 1.220$. Vi finner dermed fire kandidatpunkter

$$(x,y) \approx (5.864, \pm\, 2.049), (-1.364, \pm 1.220)$$

Blant disse fire punktene, gir $(x,y) \approx (5.864, 2.049)$ den største verdien av $f(x,y) = xy$. Vi kan derfor konkludere at maksimumsverdien er

$$f_{\max} \approx f(5.864, 2.049) = 5.864 \cdot 2.049 \approx 12.02$$

d) Nivåkurver for $f(x,y) = xy$ har formen $xy = c$, eller $y = c/x$ for $c \neq 0$, og dette er hyperbler. For $c = 0$ består nivåkurven av aksene. Nivåkurvene for $c = \pm 16$, $c \approx \pm 12.0$ (maksimumsverdien), $c = \pm 8$, $c = \pm 4$ og $c \approx \pm 1.7$ (verdien i de andre kandidatpunktene) er vist som blå hyperbler i Figur 2, sammen med bibetingelsen (rød ellipse) og kandidatpunktene. Funksjonsverdiene til hver nivåkurve er vist (grått). Vi ser at nivåkurven til f tangerer ellipsen i hvert av kandidatpunktene, og det er kun disse punktene som kan være løsning av Lagrangeproblemet: Nivåkurver som ikke skjærer ellipsen (stiplet) har ikke noen tillatte punkter. Nivåkurver som skjærer ellipsen men ikke tangerer den, kan ikke være maksimumspunkter fordi vi fortsatt får skjæringspunkter med ellipsen om vi øker c litt.



FIGUR 2. Nivåkurvene $xy = c$ for $c = \pm 16, \approx \pm 12.0, \pm 8, \pm 4, \approx \pm 1.7$