SENSORVEILEDNING - Hjemmeeksamen

MET 01801
Matematikk for siviløkonomer

Institutt for Samfunnsøkonomi

Utlevering:	02.06.2021	Kl. 10:00
Innlevering:	02.06.2021	Kl. 15:15

For mer informasjon om formalia, se eksamensoppgaven.

Løsning	MET 1180 Matematikk for siviløkonomer
Dato	2. juni 2021 kl 1000 - 1500

Oppgave 1.
Vi skriver funksjonssuttryket $f(x) = 2\sqrt{x}\ln(x) - 4\sqrt{x} = 2(\ln x - 2)\sqrt{x}$, og ser at $f(x)$ er definert for $x > 0$.

(a) Vi bruker produktregelen for å derivere $f(x) = 2(\ln x - 2)\sqrt{x}$:

$$f'(x) = \frac{2}{x}\sqrt{x} + 2(\ln x - 2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x - 2}{\sqrt{x}} = \frac{2 + \ln x - 2}{\sqrt{x}} = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

(b) Når $x \to \infty$, så vil $2(\ln x - 2) \to \infty$ og $\sqrt{x} \to \infty$. Dette gir

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

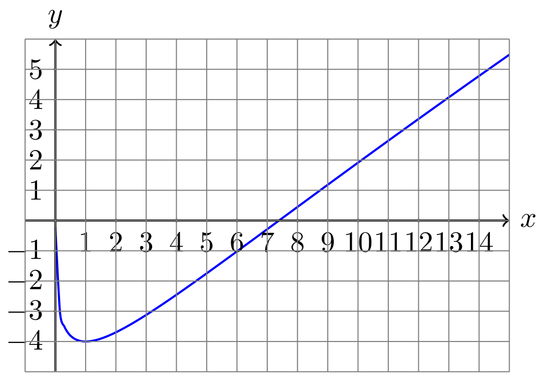
Når $x \to 0^+$, så vil $2(\ln x - 2) \to -\infty$ og $\sqrt{x} \to 0$. Vi skriver derfor om funksjonsuttrykket $f(x) = 2(\ln x - 2)\sqrt{x}$ som en brøk og bruker L'Hôspitals regel for å regne ut grenseverdien:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2(\ln x - 2)}{1/\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2/x}{(-1/2)x^{-3/2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-4\sqrt{x}}{1} = 0$$

(c) Vi har at $f'(x) = 0$ når $\ln x = 0$, det vil si for $x = 1$, og fra uttrykket for $f'(x)$ som vi fant i (a) ser vi at f er avtagende i $(0,1]$ og voksende i $[1,\infty)$. Derfor har f globalt minimum $f(1) = -4$, og fra resultatene i (b) vil f gå mot 0 når $x \to 0^+$ og mot ∞ når $x \to \infty$. Vi konkluderer med at $V_f = [-4, \infty)$, og at $f(x) = a$ har to løsninger når $-4 < a < 0$. Dette gir at

$$\text{Likningen } f(x) = a \text{ har } \begin{cases} \text{to løsninger for } -4 < a < 0 \\ \text{én løsning for } a = -4 \text{ og } a \geq 0 \\ \text{ingen løsninger for } a < -4 \end{cases}$$

Grafen til funksjonen f er vist nedenfor. Som begrunnelse for svaret kan man bruke skisse av grafen tegnet for hånd, men argumentene ovenfor (eller tilsvarende) må også være med i begrunnelsen.



FIGUR 1. Grafen til $y = f(x)$

Oppgave 2.

(a) Vi bruker faktoriseringen $9 - x^2 = (3-x)(3+x)$ og delbrøksoppspaltning til å skrive om uttrykket under integralet som

$$\frac{3 - 7x}{9 - x^2} = \frac{A}{3 - x} + \frac{B}{3 + x}$$

Dette gir $3 - 7x = A(3+x) + B(3-x) = (3A + 3B) + (A - B)x$, og derfor må vi ha at $3A + 3B = 3$, eller $A + B = 1$, og at $A - B = -7$. Legger vi sammen de to siste likningene, får vi $2A = -6$, eller $A = -3$, og dette gir $B = 4$. Dermed blir integralet

$$\int \frac{3 - 7x}{9 - x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-3}{3 - x} + \frac{4}{3 + x}\,\mathrm{d}x = 3\ln|3 - x| + 4\ln|3 + x| + C$$

(b) Vi bruker substitusjonen $u = x + 1$, som gir $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$, og dermed blir integralet

$$\int 15x \cdot \sqrt{x+1}\ \mathrm{d}x = \int 15(u-1)\sqrt{u}\ \mathrm{d}u = \int 15u\sqrt{u} - 15\sqrt{u}\ \mathrm{d}u = \int 15u^{3/2} - 15u^{1/2}\ \mathrm{d}u$$
$$= 15 \cdot \frac{2}{5}u^{5/2} - 15 \cdot \frac{2}{3}u^{3/2} + C = 6u^2\sqrt{u} - 10u\sqrt{u} + C$$
$$= \sqrt{x+1} \cdot (6(x+1)^2 - 10(x+1)) + C = (6x^2 + 2x - 4)\sqrt{x+1} + C$$

(c) Vi bruker substitusjonen $u = \ln(x)$, som gir $\mathrm{d}u = (1/x)\,\mathrm{d}x$, eller $\mathrm{d}x = x\,\mathrm{d}u$, og dermed blir integralet

$$\int \frac{3\sqrt{\ln x}}{x}\ \mathrm{d}x = \int \frac{3\sqrt{u}}{x} \cdot x\,\mathrm{d}u = \int 3u^{1/2}\ \mathrm{d}u = 3 \cdot \frac{2}{3}u^{3/2} + C = 2\ln x\,\sqrt{\ln x} + C$$

Oppgave 3.

(a) Siden grafen til $f'(x)$ er oppgitt å være en hyperbel, kan funksjonsuttrykket til $f'(x)$ skrives på formen

$$f'(x) = c + \frac{a}{x-b}$$

med en vertikal asymptote $x = b$ og en horisontal asymptote $y = c$. Vi leser av fra grafen så nøyaktig vi kan, og finner at den vertiale asymptoten er $x = 1.25 = 5/4$ og at den horisontale asymptoten er $y = 1$. Naturlig nøyaktighet i avlesningen er nærmeste multippel av $0.25 = 1/4$ pga rutenettet som er vist. Dette gir

$$f'(x) = 1 + \frac{a}{x - 5/4} = 1 + \frac{4a}{4x-5}$$

Vi leser av et punkt på grafen for å bestemme a, og velger skjæringspunktet med y-aksen. Vi leser dette av som $(1.75, 0) = (7/4{,}0)$. Dette gir

$$0 = 1 + \frac{4a}{4 \cdot 7/4 - 5} = 1 + \frac{4a}{2} \quad \Rightarrow \quad 4a = -2$$

Vi kan også skrive dette som $a = -1/2$. Dette gir funksjonsuttrykket

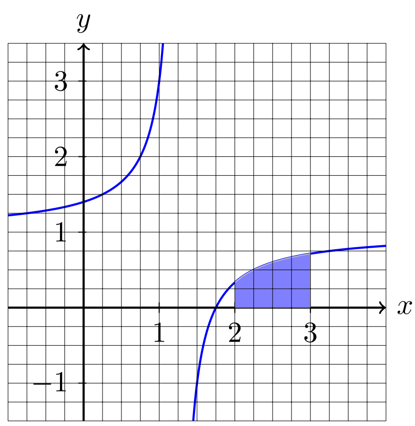
$$f'(x) = 1 + \frac{-2}{4x-5} = \frac{4x-5-2}{4x-5} = \frac{4x-7}{4x-5}$$

(b) Vi har per definisjon at $f(x)$ er en antiderivert for funksjonen $f'(x)$, og det betyr at

$$\int_2^3 f'(x)\ \mathrm{d}x = [f(x) + C]_2^3 = f(3) - f(2)$$

Dermed er $f(3) - f(2)$ arealet under grafen til $y = f'(x)$ i intervallet $[2{,}3]$, markert i figuren nedenfor. Vi leser av en tilnærmingsverdi for $f(3) - f(2)$ ved å telle antall ruter under grafen. Hver rute har areal $1/4 \cdot 1/4 = 1/16$, og siden arealet under grafen er omtrent 9 ruter, finner vi estimatet

$$f(3) - f(2) \approx 9 \cdot \frac{1}{16} = \frac{9}{16} \approx 0.56$$



(c) Vi finner et uttrykk for $f(x)$ ved å bruke uttrykket for $f'(x)$ fra (a) og ved å bruke at $f(x)$ er en antiderivert for $f'(x)$. Dette gir

$$f(x) = \int f'(x)\ \mathrm{d}x = \int 1 + \frac{-2}{4x-5}\ \mathrm{d}x = x - 2\ln|4x-5| \cdot \frac{1}{4} + C = x - \frac{1}{2}\ln|4x-5| + C$$

Basert på dette uttrykket finner vi verdien

$$f(3) - f(2) = \left[x - \frac{1}{2}\ln|4x-5|\right]_2^3 = (3 - \ln(7)/2) - (2 - \ln(3)/2)$$
$$= 1 - \frac{1}{2}(\ln 7 - \ln 3) = 1 - \frac{1}{2}\ln(7/3) \approx 0.576$$

Oppgave 4.

(a) Vi regner ut determinanten ved kofaktorutvikling langs første rad:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 7 & 2 & 11 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 3(12-11) - 4(42-55) + 5(7-10) = 3 + 52 - 15 = 40$$

Dette betyr at A har en invers matrise, og vi bruker den adjungerte matrisen til å finne den:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{40}\begin{pmatrix} 1 & 13 & -3 \\ -19 & -7 & 17 \\ 34 & 2 & -22 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{40}\begin{pmatrix} 1 & -19 & 34 \\ 13 & -7 & 2 \\ -3 & 17 & -22 \end{pmatrix}$$

(b) Siden A er invertibel, har systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en entydig løsning $\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}$. Når $r = 24$, $s = -20$, og $t = -6$ gir dette løsningen

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{40}\begin{pmatrix} 1 & -19 & 34 \\ 13 & -7 & 2 \\ -3 & 17 & -22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 24 \\ -20 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{40}\begin{pmatrix} 24 + 380 - 204 \\ 312 + 140 - 12 \\ -72 - 340 + 132 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -7 \end{pmatrix}$$

(c) Siden $x + y + z = 9$ også er en lineær likning i de samme variablene, legger vi inn denne likningen i det lineære systemet. Det gir enkleste regning om vi setter denne nye likningen først. Vi bruker så Gauss-eliminasjon på den nye utvidede matrisen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & r \\ 7 & 2 & 11 & s \\ 5 & 1 & 6 & t \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & r-27 \\ 0 & -5 & 4 & s-63 \\ 0 & -4 & 1 & t-45 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & r-27 \\ 0 & 0 & 14 & s-63+5(r-27) \\ 0 & 0 & 9 & t-45+4(r-27) \end{array}\right)$$

Etter å ha trukket sammen uttrykkene i den siste matrisen, multipliserer vi tredje linje med 9 og fjerde rad med 14 for å gjøre den siste radoperasjonen lettere:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & r-27 \\ 0 & 0 & 14 & 5r+s-198 \\ 0 & 0 & 9 & 4r+t-153 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & r-27 \\ 0 & 0 & 126 & 9(5r+s-198) \\ 0 & 0 & 126 & 14(4r+t-153) \end{array}\right)$$

Dette betyr at dette lineære systemet har løsninger hvis og bare hvis følgende likning er oppfyllt:

$$9(5r+s-198) = 14(4r+t-153) \quad \Leftrightarrow \quad 45r + 9s - 1782 = 56r + 14t - 2142$$

Dette gir $-11r + 9s - 14t = -360$, eller $11r - 9s + 14t = 360$. Vi kan derfor konkludere at det finnes løsninger av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ slik at $x + y + z = 9$ hvis og bare hvis $11r - 9s + 14t = 360$.

Oppgave 5.

Siden området $D = \{(x,y) : 0 \leq x,y \leq 1\}$ er et kvadrat og dermed kompakt, har f en maksimums- og en minimumsverdi på D. Kandidater er stasjonære punkt for f i det indre av D, og randpunkt (som er de fire sidekantente i D). For å finne stasjonære punkt i det indre av D, løser vi førsteordensbetingelsene

$$f'_x = \sqrt{y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 = 0, \quad f'_y = \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = 0$$

Det er ingen indre punkt som oppfyller dette, siden den andre likningen gir $x = 0$. Vi ser på randpunkt, og finner den største og minste verdien av $f(x,y) = \sqrt{xy} - x$ på hver av de fire sidekantene. Når $x = 0$, så er $f(0,y) = 0$ for $0 \leq y \leq 1$. Når $y = 0$, så er $f(x,0) = -x$, og den minste verdien er $f(1,0) = -1$ og den største er $f(0,0) = 0$ når $0 \leq x \leq 1$ siden funksjonen er avtagende. Når $x = 1$, så er $f(1,y) = \sqrt{y} - 1$, og den minste verdien er $f(1,0) = -1$ og den største er $f(1,1) = 0$ når $0 \leq y \leq 1$ siden funksjonen er voksende. Når $y = 1$, så er $f(x,1) = \sqrt{x} - x$ for $0 \leq x \leq 1$, med derivert

$$(\sqrt{x} - x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 = \frac{1 - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

Den deriverte er lik null når $\sqrt{x} = 1/2$, eller $x = 1/4$, og vi ser at funksjonen er voksende for $x \leq 1/4$ og avtagende for $x \geq 1/4$. Det betyr at $f(1/4,1) = 1/2 - 1/4 = 1/4$ er største verdi, og $f(0,1) = f(1,1) = 0$ er minste verdi. Etter å ha sett på alle sidekanter, kan vi konkludere med at $f_{\max} = 1/4$ og at $f_{\min} = -1$.

Oppgave 6.

(a) Likningen $y^2 = 5x^2 - x^3$ for kurven C kan skrives som $y^2 + x^3 - 5x^2 = 0$ for å få den på standard form $g(x,y) = a$. Stigningstallet til tangenten i et punkt på kurven C er gitt ved

$$y' = -\frac{g'_x}{g'_y} = -\frac{3x^2 - 10x}{2y}$$

og $y' = -1$ gir at $3x^2 - 10x = 2y$, eller $y = x(3x - 10)/2$. Vi setter dette inn i likningen for C, og det gir

$$\begin{aligned} y^2 + x^3 - 5x^2 &= \frac{x^2(3x-10)^2}{4} + x^2(x-5) = \frac{x^2(3x-10)^2}{4} + \frac{x^2(x-5)\cdot 4}{4} \\ &= \frac{x^2(9x^2 - 60x + 100 + 4x - 20)}{4} = \frac{x^2(9x^2 - 56x + 80)}{4} = 0 \end{aligned}$$

Dermed er $x = 0$ eller $9x^2 - 56x + 80$. Hvis $x = 0$, så er $y = 0$, og vi får punktet $(0,0)$. Hvis $9x^2 - 56x + 80 = 0$, så er

$$x = \frac{56 \pm \sqrt{56^2 - 4\cdot 9\cdot 80}}{2\cdot 9} = \frac{56 \pm 16}{18} = \frac{28 \pm 8}{9}$$

som gir $x = 4$ eller $x = 20/9$. Når vi setter inn $x = 4$ i $y = x(3x - 10)/2$, får vi $y = 4$, og når vi setter inn $x = 20/9$ får vi $y = -100/27$. Vi finner dermed punktene $(4,4), (20/9, -100/27)$ med $(x,y) \neq (0,0)$.

(b) Vi bruker Lagranges multiplikatormetode, og lar $\mathcal{L}(x,y;\lambda) = x + y - \lambda(y^2 + x^3 - 5x^2)$. Lagrange-betingelsene blir da

$$\mathcal{L}'_x = 1 - \lambda(3x^2 - 10x) = 0, \quad \mathcal{L}'_y = 1 - \lambda(2y) = 0, \quad y^2 + x^3 - 5x^2 = 0$$

Vi kan eliminere λ fra de to første likningene, og dette gir

$$\lambda = \frac{1}{3x^2 - 10x} = \frac{1}{2y} \quad \Rightarrow \quad 2y = 3x^2 - 10x \quad \Rightarrow \quad y = x(3x - 10)/2$$

Vi ser at vi får samme likninger som i (a), og dermed får vi $(x,y) = (4,4), (20/9, -100/27), (0,0)$. Vi bruker så den andre likningen til å finne λ. Punktet $(x,y) = (0,0)$ gir $1 - \lambda\cdot 0 = 0$, som ikke har løsning. I punktet $(4,4)$ får vi $1 = 8\lambda$, eller $\lambda = 1/8$, og i punktet $(20/9, -100/27)$ får vi $1 = \lambda\cdot(-200/27)$, eller $\lambda = -27/200$. Dermed finner vi to løsninger av Lagrangebetingelsene:

$$(x,y;\lambda) = (4,4;1/8), (20/9, -100/27; -27/200)$$

med henholdsvis $f(4,4) = 8$ og $f(20/9, -100/27) = -40/27$.

(c) I tillegg til de to kandidatpunktene fra (b), kan vi også ta med tillatte punkt med degenerert bibetingelse. Vi løser likningene

$$g'_x(x,y) = 3x^2 - 10x = 0, \quad g'_y(x,y) = 2y = 0, \quad y^2 + x^3 - 5x^2 = 0$$

Vi finner dermed punktet $(x,y) = (0,0)$ med $f(0,0) = 0$. Den beste kandidat for maksimum i Lagrangeproblemet er derfor $f(4,4) = 8$. Merk at nivåkurven for $f(x,y) = x + y$ gjennom dette punktet er $x + y = 8$, og dette er tangenten til C i $(4,4)$: Dette følger fra teori, men vi kan også se dette konkret siden $y - 4 = -1(x - 4)$ gir $x + y = 8$. Vi finner skjæringspunkter mellom denne tangenten og C: Vi setter inn $y = 8 - x$ i likningen for C, og får $(8-x)^2 + x^3 - 5x^2 = 0$, eller $x^3 - 4x^2 - 16x + 64 = 0$. Vi vet at $x = 4$ er en løsning, siden dette er et skjæringspunkt. Polynomdivisjon gir

$$x^3 - 4x^2 - 16x + 64 = (x-4)(x^2-16) = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-4)(x-4)(x+4) = 0$$

Dette betyr at $x = -4$ gir et annet skjæringspunkt, med $y = 8 - (-4) = 12$, og altså er $f(-4{,}12) = 8 = f(4{,}4)$. Siden C og $x + y = 8$ ikke møtes i en tangent i $(-4{,}12)$, betyr dette at det finnes punkter på C nært $(-4{,}12)$ med $f(x{,}y) > 8$. Lagrangeproblemet har derfor ikke noe maksimum.

Oppgave 7.

Vi lar $x = \sqrt[3]{7+\sqrt{50}} + \sqrt[3]{7-\sqrt{50}} = u + v$ med $u = \sqrt[3]{7+\sqrt{50}}$ og $v = \sqrt[3]{7-\sqrt{50}}$. For å finne et polynom $p(x)$ med x som nullpunkt, regner vi først ut

$$x^3 = (u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$$

Vi har at $u^3 + v^3 = (7+\sqrt{50}) + (7-\sqrt{50}) = 14$, og siden $(7+\sqrt{50})(7-\sqrt{50}) = 49 - 50 = -1$, har vi også at

$$3uv = 3\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}\,\sqrt[3]{7-\sqrt{50}} = 3\sqrt[3]{-1} = 3(-1) = -3$$

Vi har derfor at x må oppfylle likningen $x^3 = 14 - 3x$, som kan skrives $x^3 + 3x - 14 = 0$, og dermed kan vi velge $p(x) = x^3 + 3x - 14$. Siden $p(x) = x^3 + 3x - 14$ har derivert $p'(x) = 3x^2 + 3 > 0$, så er p en strengt voksende funksjon og har derfor nøyaktig ett nullpunkt. På den andre siden har vi at $p(2) = 2^3 + 3 \cdot 2 - 14 = 8 + 6 - 14 = 0$. Dette betyr at $x = 2$ er nullpunktet for p, og dermed er

$$\sqrt[3]{7+\sqrt{50}} + \sqrt[3]{7-\sqrt{50}} = 2$$