Løsning	MET 1180 Matematikk for siviløkonomer
Dato	20. desember 2021 kl 0900 - 1400

Oppgave 1.

(a) Vi har at $(e^x)' = e^x$ og $(e^{-x})' = -e^{-x}$ ved kjerneregelen. Dermed følger det at

$$f'(x) = e^x - 3\,e^{-x}, \quad f''(x) = e^x + 3\,e^{-x}$$

Siden $f''(x) > 0$ for alle x, er f en konveks funksjon.

(b) Regningen i (a) viser at den deriverte er gitt ved

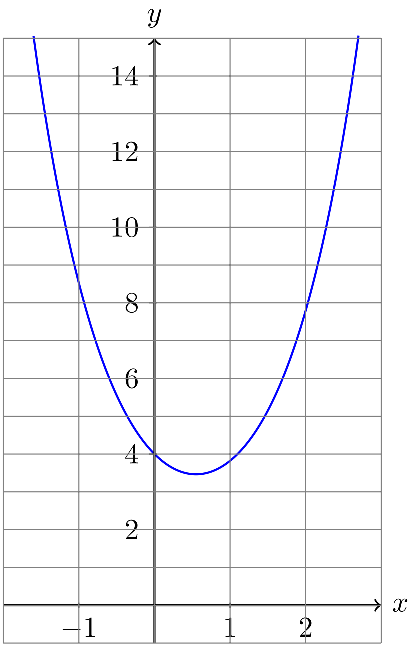
$$f'(x) = e^x - 3\,e^{-x} = e^{-x}\left(e^{2x} - 3\right) = \frac{(e^x - \sqrt{3})(e^x + \sqrt{3})}{e^x}$$

Stasjonære punkt for f er gitt ved $f'(x) = 0$, og vi ser fra uttrykket ovenfor at det gir $e^x = \sqrt{3}$ siden $e^x + \sqrt{3}$, $e^x > 0$ for alle x. Funksjonen har dermed et stasjonært punkt, gitt ved $e^x = \sqrt{3}$, eller $x = \ln(\sqrt{3}) = \ln(3)/2$. Siden f er konveks, er dette et globalt minimumspunkt, med minimumsverdi

$$f_{\min} = f(\ln(\sqrt{3})) = \sqrt{3} + 3 \cdot 1/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Funksjonen har ikke noe globalt maksimum.

(c) Vi ser at $f(x) \to \infty$ når $x \to \infty$ og $x \to -\infty$. Vi vet fra (a) at f er konveks og fra (b) at den har et minimum i $x = \ln(\sqrt{3}) \approx 0.55$ med minimumsverdi $f_{\min} = 2\sqrt{3} \approx 3.46$. Vi bruker dette til å skissere grafen til f, som er vist nedenfor.



FIGUR 1. Grafen til $y = f(x)$

(d) Vi ser på funksjonen $f(x) = e^x + a\,e^{-x}$ med parameter a, og finner de deriverte på tilsvarende måte som i (b):

$$f'(x) = e^x - a\,e^{-x}, \quad f''(x) = e^x + a\,e^{-x}$$

Vi ser at for enhver parameterverdi $a > 0$, så er $f''(x) > 0$ for alle x, og dermed er f en konveks funksjon. Den har et stasjonært punkt, gitt ved

$$f'(x) = e^x - a\,e^{-x} = e^{-x}\left(e^{2x} - a\right) = \frac{(e^x - \sqrt{a})(e^x + \sqrt{a})}{e^x} = 0$$

Dette gir $e^x = \sqrt{a}$, eller $x = \ln(\sqrt{a})$. Siden f er konveks, er dette stasjonære punktet et globalt minimumspunkt for f, og dermed er den globale minimumsverdien til $f(x;a)$ gitt ved

$$f_{\min} = f(\ln(\sqrt{a})) = \sqrt{a} + a \cdot 1/\sqrt{a} = 2\sqrt{a}$$

Det følger at $f(x;a) = 4$ har to løsninger hvis og bare hvis $f_{\text{min}} < 4$, som gir $2\sqrt{a} < 4$. Vi løser ulikheten, og får $\sqrt{a} < 2$, eller at $0 < a < 4$. Hvis $a \leq 0$, så har $f(x;a) = 4$ maksimalt en løsning, siden f er en voksende funkjon.

Oppgave 2.

(a) Vi skriver $1/\sqrt{x} = x^{-1/2}$ som en potens, og bruker potensregelen for derivasjon:

$$\int \frac{2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int 2x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = 4x^{1/2} + C = 4\sqrt{x} + C$$

(b) Vi bruker delbrøksoppspaltning til å forenkle uttrykket som skal integreres:

$$\frac{12}{4-x^2} = \frac{A}{2-x} + \frac{B}{2+x} \quad \Rightarrow \quad 12 = A(2+x) + B(2-x)$$

Dette gir $(A-B)x + (2A+2B) = 12$, og dermed $A - B = 0$ og $2A + 2B = 12$. Vi finner dermed at $A = B$ og $4A = 12$, eller $A = 3$. Integralet blir da

$$\int \frac{12}{4-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3}{2-x} + \frac{3}{2+x}\,\mathrm{d}x = -3\ln|2-x| + 3\ln|2+x| + C = 3\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right| + C$$

(c) Vi bruker delvis integrasjon med $u' = 9\sqrt{x}$ og $v = \ln(\sqrt{x})$, som gir $u = 9 \cdot 2/3 \cdot x^{3/2} = 6x\sqrt{x}$ og $v' = 1/\sqrt{x} \cdot 1/(2\sqrt{x}) = 1/(2x)$. Siden $\int u'v\,\mathrm{d}x = uv - \int uv'\,\mathrm{d}x$ gir delvis integrasjon

$$\int 9\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = 6x\sqrt{x}\ln(\sqrt{x}) - \int 3\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = 6x\sqrt{x}\ln(\sqrt{x}) - 2x\sqrt{x} + C$$

Oppgave 3.

(a) Vi skriver ned den utvidede matrisen til systemet for en vilkårlig a, og bruker elementære radoperasjoner:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & 2 & a & 9 \\ 5 & 12 & 3 & -3 & 16 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & a-12 & 9 \\ 0 & 2 & -2 & -23 & 16 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & a-12 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2a & -2 \end{array}\right)$$

Når $a = 0$, er resultatet en trappeform, der $1 - 2a = 1$ er en pivot, og vi har markert pivot-posisjonene i tilfellet $a = 0$ som blå. Det er dermed uendelig mange løsninger med z fri siden z-kolonnen ikke har noen pivotposisjoner, og vi finner løsningene ved baklengs substitusjon: Fra siste likning finner vi $w = -2$, og dette gir

$$\begin{aligned} y - z - 12w = 9 \quad &\Rightarrow \quad y = z + 12(-2) + 9 = z - 15 \\ x + 2y + z + 4w = 0 \quad &\Rightarrow \quad x = -2(z-15) - z - 4(-2) = 38 - 3z \end{aligned}$$

Løsningen er altså $(x,y,z,w) = (38 - 3z, z - 15, z, -2)$, der z er en fri variabel.

(b) Vi bruker Gauss-prosessen fra (a). Resultatet er en trappeform: Hvis $1 - 2a = 0$, eller $a = 1/2$, er de tre posisjonene markert som blå pivotposisjoner. I så fall har systemet uendelig mange løsninger, og z er en fri variabel. Hvis $1 - 2a = 0$, eller $a = 1/2$, så er ikke $1 - 2a$ i tredje rad lengere en pivotposisjon. I stedet har matrisen en pivotposisjonen i siste rad og siste kolonne, og det lineære systemet er inkonsistent (har ingen løsninger). Vi konkluderer dermed at det lineære systemet er konsistent for $a \neq 1/2$.

(c) Vi skriver $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ for the fire kolonnevektorene til A, og ser på vektorlikningen

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 + x_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{w}$$

Vi har at $\mathbf{w}$ er en lineær-kombinasjon av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ hvis denne likningen har løsninger, og vektorlikningen svarer til det lineære systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{w}$. Vi løser dette ved å bytte ut $\mathbf{b}$ med $\mathbf{w}$ og bruke samme elemenentære radoperasjoner som i (a):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 2 & a & 1 \\ 5 & 12 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & a-12 & -5 \\ 0 & 2 & -2 & -23 & -10 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & a-12 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2a & 0 \end{array}\right)$$

Vi ser at dette systemet er konsistent for alle verdier av a. Hvis $a = 1/2$, så er x_3, x_4 frie variabler, og hvis $a \neq 1/2$, så er x_3 fri. Dermed er $\mathbf{w}$ en lineær-kombinasjon av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ for alle verdier av a. Siden x_3 er fri, og x_4 enten er fri eller $x_4 = 0$, kan vi sette $x_3 = x_4 = 0$

for å finne en løsning. Dette gir $x_2 = -5$, og $x_1 - 10x_2 = 2$, eller $x_1 = 12$. Dermed har vi $\mathbf{w} = 12\mathbf{v}_1 - 5\mathbf{v}_2$ for alle verdier av a.

Oppgave 4.

(a) De partiellderiverte til $f(x,y) = x^2 + y^2 - x^2y^2$ er $f'_x = 2x(1-y^2)$ og $f'_y = 2y(1-x^2)$, og førsteordensbetingelsene $f'_x = f'_y = 0$ er gitt ved

$$2x(1-y^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ eller } y^2 = 1$$
$$2y(1-x^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \text{ eller } x^2 = 1$$

Den første likningen gir $x = 0$ eller $y = \pm 1$. Hvis $x = 0$, gir den andre likningen $y = 0$. Hvis $y = \pm 1$, så gir den andre likningen $x = \pm 1$. Dermed finner vi de fem stasjonære punktene $(x,y) = (0,0)$ og $(x,y) = (\pm 1, \pm 1)$. Hessematrisen er gitt ved

$$H(f) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2y^2 & -4xy \\ -4xy & 2-2x^2 \end{pmatrix}$$

I punktet $(x,y) = (0,0)$ er $\det H(f)(0,0) = 4 > 0$, og $A = C = 2 > 0$. Dermed er $(0,0)$ et lokalt minimumspunkt ved annenderivert-testen. I de fire punktene $(x,y) = (\pm 1, \pm 1)$ er $\det H(f)(\pm 1, \pm 1) = 0 \cdot 0 - (\pm 4)^2 = -16 < 0$, og dermed er de fire punktene $(\pm 1, \pm 1)$ sadelpunkt ved annenderivert-testen.

(b) Fra (a) ser vi at $(x,y) = (0,0)$ med $f(0,0) = 0$ er et lokalt minimum, og derfor et mulig globalt minimum. Men siden $f(3,3) = 9 + 9 - 81 = -63 < 0$, er dette punktet ikke et globalt minimum. Siden f ikke har lokale maksimum ifølge (a), har f hverken globale maksimums- eller minimumsverdier.

(c) Vi bruker Lagranges metode med $\mathcal{L} = x^2 + y^2 - x^2y^2 - \lambda(xy - 1)$ for å finne kandidater for minimum. Lagrange-betingelsene gir

$$\mathcal{L}'_x = 2x - 2xy^2 - \lambda \cdot y = 0$$
$$\mathcal{L}'_y = 2y - 2x^2y - \lambda \cdot x = 0$$
$$xy = 1$$

De to første likningene gir $2x(1-y^2) = \lambda y$ og $2y(1-x^2) = \lambda x$. Vi multipliserer første likning med x og and likning med y for å få $\lambda xy = \lambda \cdot 1 = \lambda$ på begge høyresidene. Dermed får vi

$$\lambda = 2x^2(1-y^2) = 2y^2(1-x^2) \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - 2x^2y^2 = 2y^2 - 2x^2y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = y^2$$

Dette gir $x = y$ eller $x = -y$. Setter vi inn dette i bibetingelsen $xy = 1$, gir $x = y$ at $x^2 = 1$, eller $x = \pm 1$. Tilsvarende gir $x = -y$ at $(-y)y = 1$, eller $y^2 = -1$, som ikke har løsninger. Setter vi inn $x = y = \pm 1$ i en av uttrykkene for λ ovenfor, får vi $\lambda = 0$. Dermed finner vi to kandidatpunkter

$$(x,y;\lambda) = (1,1;0), (-1,-1;0)$$

med f-verdi $f(\pm 1, \pm 1) = 1$. Siden $xy = 1$ er hyperbelen $y = 1/x$, er det ingen tillatte punkter med degenerert bibetingelse, siden en hyperbel har en veldefinert tangent i ethvert punkt. Det gjenstår å undersøke om de to kandidatpunktene vi har funnet er minimumspunkter. Merk at for tillatte punkter, der $xy = 1$, er $f(x,y) = x^2 + y^2 - x^2y^2 = x^2 + y^2 - 1$. Dermed kan vi se på problemet

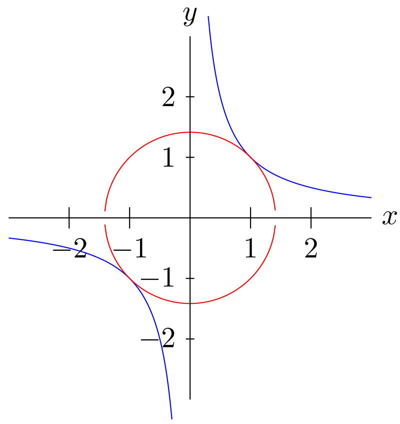
$$\min x^2 + y^2 - 1 \text{ når } xy = 1$$

istedet. Det vil ha samme minimumspunkt og minimumsverdi (hvis de finnes), men muligens en annen verdi for λ: Nå blir Lagrange-betingelsene

$$\mathcal{L}'_x = 2x - \lambda \cdot y = 0$$
$$\mathcal{L}'_y = 2y - \lambda \cdot x = 0$$
$$xy = 1$$

De to første likningene gir $x = \lambda y/2$, og $2y - \lambda(\lambda y/2) = 0$, eller $4y - \lambda^2 y = y(4 - \lambda^2) = 0$, og vi får $y = 0$, $\lambda = 2$ eller $\lambda = -2$. Hvis $y = 0$, så blir $x = 0$, og dette punktet passer ikke i bibetingelsen $xy = 1$. Hvis $\lambda = -2$, så er $x = -y$, og bibetingelsen gir $(-y)y = 1$, eller $y^2 = -1$, som ikke har løsninger. Hvis $\lambda = 2$, så er $x = y$, og bibetingelsen gir $y^2 = 1$, eller

$y = \pm 1$. Vi får dermed $(x,y) = (1,1), (-1,-1)$ som før, med f-verdi $f(\pm 1, \pm 1) = 1$, men med $\lambda = 2$ denne gang. Nivåkurvene til $x^2 + y^2 - 1$ er gitt ved $x^2 + y^2 - 1 = c$, eller $x^2 + y^2 = c + 1$, som er en sirkel med radius $\sqrt{c+1}$ når $c > -1$. Vi får følgende geometriske bilde: Den blå



kurven består at de tillatte punktene, gitt ved bibetingelsen $xy = 1$, og den røde kurven er nivåkurven til $x^2 + y^2 - 1$ for $c = 1$, som tangerer den blå kurven i kandidatpunktene $(1,1)$ og $(-1,-1)$. Siden sirkler med mindre radius ikke vil skjære hyperbelen, er kandidatpunktene minimumspunkter, og $f_{\min} = 1$ er minimumsverdien. Dermed er det også minimumsverdien til det opprinnelige problemet

$$\min f(x,y) = x^2 + y^2 - x^2y^2 \text{ når } xy = 1$$

(d) I det opprinnelige Lagrange-problemet fant vi minimumsverdien $f_{\min} = 1$, minimumspunktene $(x,y) = (1,1), (-1,1)$, og Lagrange-multiplikatoren $\lambda = 0$. Dermed vil minimumsfunksjonen $f^*(a)$ til problemet

$$\min f(x,y) = x^2 + y^2 - x^2y^2 \text{ når } xy = a$$

med parameter a oppfylle

$$\frac{df^*(a)}{da} = \lambda = 0$$

Det betyr at

$$f^*(a) \approx f^*(1) + \Delta a \cdot df^*(a)/da = 1 + (a-1) \cdot 0 = 1$$

når a er nær verdien 1. Hvis vi bruker $\lambda = 2$ i stedet for $\lambda = 0$, finner vi den marginale endringen av minimumsverdien $f^*(a)$ til problemet

$$\min x^2 + y^2 - 1 \text{ når } xy = a$$

der 1 er en konstant som ikke endrer seg som $x^2y^2 = a^2$ i takt med endringen av konstanten a i bibetingelsen $xy = a$.

Oppgave 5.

(a) Vi ser fra figuren at for alle markerte punkter er $-2 \leq x,y \leq 2$. Det betyr at mengden $D = \{(x,y) : g(x,y) \leq a\}$ av tillatte punkter er begrenset, og derfor også kompakt. Ved ekstremverdisetningen har derfor problemet en løsning. Siden $f(x,y) = x+y$ ikke har stasjonære punkter, kan ikke maksimumspunktet være et indre punkt med $g(x,y) < a$. Det må derfor være et randpunkt med $g(x,y) = a$, altså et punkt på den blå kurven.

(b) Hvis et punkt på den blå kurven skal være et kandidatpunkt, må nivåkurven til f møte den blå kurven i en tangent. Nivåkurvene til f er gitt ved $f(x,y) = c$, eller $x + y = c$. Dette er rette linjer med stigningstall -1. Vi ser derfor etter et punkt på den blå kurven som møter en linje med stigningstall -1 i en tangent, og leser av at de eneste mulighetene er punktene $(1,1)$ og $(-1,-1)$. Det første har $f(1,1) = 2$, og det andre har $f(-1,-1) = -2$. Vi estimerer derfor maksimumsverdien til å være $f_{\max} = 2$ i $(x,y) = (1,1)$. Vi ser fra figuren at alle punkter på den blå kurven har en entydig tangent, derfor er det ingen tillatte punkter med degenerert bibetingelse.