Eksamen	MET 1180 Matematikk for siviløkonomer
Dato	20. desember 2021 kl 0900 - 1400

Eksamensoppgaven består av 15 deloppgaver, og 1 bonusoppgave (som det ikke er nødvendig å besvare). Alle svar skal begrunnes, og begrunnelsene skal være basert på teorien i kurset.

- **Besvarelsen skal leveres inn som en PDF-fil, og den skal være skrevet for hånd.**
- Besvarelsen skal leveres individuelt. Samarbeid med andre er ikke tillatt og er å anse som fusk.
- Alle besvarelser gjennomgår automatisk plagiatsjekk. Studenter kan også kalles inn til muntlig høring som etterprøving/kontroll av innleveringsoppgaven.

Oppgave 1.
Vi ser på funksjonen $f(x) = e^x + 3\,e^{-x}$.

(a) **(6p)** Avgjør om f er en konveks eller konkav funksjon.
(b) **(6p)** Regn ut $f'(x)$ og finn eventuelle globale maksimum- og minimumsverdier for f.
(c) **(6p)** Skisser grafen til f. Vis utregninger som du mener er viktige å gjøre for å skissere grafen.

Vi ser på funksjonen $f(x;a) = e^x + a\,e^{-x}$ med parameter a.

(d) **(6p)** Bestem alle verdier av a slik at $f(x;a) = 4$ har minst to løsninger.

Oppgave 2.
Regn ut disse integralene. Skriv ned hvilke integrasjonsmetoder du bruker.

(a) **(6p)** $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
(b) **(6p)** $\displaystyle\int \frac{12}{4-x^2}\,\mathrm{d}x$
(c) **(6p)** $\displaystyle\int 9\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$

Oppgave 3.
Vi betrakter det lineære systemet $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ med parameter a, gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 2 & a \\ 5 & 12 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 16 \end{pmatrix}$$

(a) **(6p)** Bruk Gauss-eliminasjon til å løse det lineære systemet når $a = 0$. Marker pivot-posisjonene.
(b) **(6p)** Bestem alle verdier av a slik at det lineære systemet er konsistent.
(c) **(6p)** Uttrykk vektoren $\mathbf{w} = (2{,}1{,}0)$ som en lineær-kombinasjon av de fire kolonnevektorene til A for alle verdier av a der dette er mulig.

Oppgave 4.
Vi ser på funksjonen definert ved $f(x{,}y) = x^2 + y^2 - x^2y^2$.

(a) **(6p)** Finn alle stasjonære punkt for f, og klassifiser dem.
(b) **(6p)** Bestem globale maksimums- eller minimumsverdier for f, hvis de finnes.
(c) **(6p)** Løs optimeringsproblemet: $\min f(x{,}y) = x^2 + y^2 - x^2y^2$ når $xy = 1$.
(d) **(6p)** Estimer minimumsverdien til $\min f(x{,}y) = x^2 + y^2 - x^2y^2$ når $xy = a$.

Oppgave 5.
I figuren nedenfor er den blå kurven gitt ved likningen $g(x,y) = a$, og det markerte området er gitt ved ulikheten $g(x,y) \leq a$. Vi ser på maksimumsproblemet

$$\max f(x,y) = x + y \text{ når } g(x,y) \leq a$$

(a) **(6p)** Vis at maksimumsproblemet har en løsning som ligger på den blå kurven.
(b) **Bonus (6p)** Bruk figuren til å estimere maksimumsverdien. Begrunn svaret.