

Eksamensoppgaven består av 16 deloppgaver som vektes likt. Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1.

Vi ser på et lineært system med parameter a , gitt på matriseform som

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 & 6 \\ 3 & a & 7 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- (a) **(6p)** Løs det lineære systemet når $a = -12$.
- (b) **(6p)** Bestem eventuelle verdier av a slik at det lineære systemet ikke har løsninger.

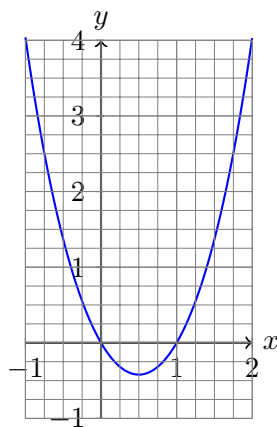
Oppgave 2.

Regn ut disse integralene:

a) **(6p)** $\int_0^1 6\sqrt{x} - 11x\sqrt[5]{x} \, dx$ b) **(6p)** $\int \frac{21-x}{9-x^2} \, dx$ c) **(6p)** $\int \frac{1}{1-\sqrt{x}} \, dx$

Figuren nedenfor viser grafen til $f'(x)$ for en funksjon f med definisjonsområde $D_f = [-1, 2]$.

- d) **(6p)** Estimer verdien av $f(1) - f(0)$. Angi resultatet du bruker.
- e) **(6p)** Finn x -koordinatene til maksimums- og minimumspunktene til f , hvis de eksisterer.



FIGUR 1. Grafen til $f'(x)$

Oppgave 3.

La matrisen A være gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$$

- (a) **(6p)** Finn A^{-1} når $a = 0$.
- (b) **(6p)** Regn ut determinanten $|A|$ for en vilkårlig verdi av a , og avgjør når $|A| = 0$.
- (c) **(6p)** Finn en vektor $\mathbf{x} = (x, y, z) \neq (0, 0, 0) = \mathbf{0}$ og en verdi av a slik at $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Oppgave 4.

Vi ser på funksjonen f gitt ved $f(x,y) = x^2y - 5xy^2 + xy^3$.

- (a) **(6p)** Finn de tre stasjonære punktene til f .
- (b) **(6p)** Regn ut Hesse-matrisen til f , og klassifiser de stasjonære punktene $(x,y) \neq (0,0)$.

Oppgave 5.

Vi ser på Lagrange-problemet $\max f(x,y) = x + 3y$ når $x^2 - 6x + 9y^2 + 18y + 9 = 0$.

- (a) **(6p)** Lag en skisse av mengden $D = \{(x,y) : x^2 - 6x + 9y^2 + 18y + 9 = 0\}$. Er den begrenset?
- (b) **(6p)** Løs Lagrange-problemet, og finn dets maksimumsverdi.

Oppgave 6.

Vi ser på Lagrange-problemet $\max f(x,y) = y$ når $x(x^2 + y^2) = x^2 - y^2$.

- (a) **(6p)** Avgjør om det er noen tillatte punkter med degenerert bibetingelse.
- (b) **(6p)** Forklar at punktene på kurven $C = \{(x,y) : x(x^2 + y^2) = x^2 - y^2\}$ med horisontal tangent er nettopp punktene som oppfyller Lagrange-betingelsene.

Formelark

FINANSMATEMATIKK

Geometriske rekker.

En endelig geometrisk rekke har sum

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - k^n}{1 - k} = a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}$$

og en uendelige geometrisk rekke har sum

$$S = a_1 \cdot \frac{1}{1 - k} \quad \text{når } |k| < 1$$

Nåverdier.

Nåverdien K_0 til en innbetaling K_n er

$$K_0 = \frac{K_n}{(1 + r)^n} \quad \text{og} \quad K_0 = \frac{K_n}{e^{rn}}$$

ved diskret og kontinuerlig diskonteringsrente.

INTEGRASJON

Integrasjonsmetoder.

a) Delvis integrasjon:

$$\int u'v \, dx = uv - \int uv' \, dx$$

b) Substitusjon:

$$\int f(u)u' \, dx = \int f(u) \, du$$

c) Delbrøksoppspaltning:

$$\begin{aligned} \int \frac{px + q}{(x - a)(x - b)} \, dx \\ = \int \left(\frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b} \right) \, dx \end{aligned}$$

Areal.

Arealet til området begrenset av $a \leq x \leq b$ og $f(x) \leq y \leq g(x)$ er

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x)) \, dx$$

LINEÆR ALGEBRA

Cramers regel.

Et lineært system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ der $|A| \neq 0$ har en entydig løsning gitt ved

$$x_1 = \frac{|A_1(\mathbf{b})|}{|A|} \quad x_2 = \frac{|A_2(\mathbf{b})|}{|A|} \quad \dots \quad x_n = \frac{|A_n(\mathbf{b})|}{|A|}$$

der $A_i(\mathbf{b})$ framkommer ved å bytte ut kolonne i fra matrisen A med $\mathbf{b}$.

FUNKSJONER I TO VARIABLER

Andrederivert-testen.

Et stasjonært punkt (x^*, y^*) for funksjonen $f(x, y)$ er et

- a) lokalt minimum når $A > 0$ og $AC - B^2 > 0$
- b) lokalt maksimum når $A < 0$ og $AC - B^2 > 0$
- c) sadelpunkt når $AC - B^2 < 0$

der $H(f)(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$.

Nivåkurver.

Nivåkurven $f(x, y) = c$ har derivert $y' = dy/dx$ gitt ved

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

Lagranges multiplikatormetode.

Lagrange-betingelsene for problemet

$$\max / \min f(x, y) \text{ når } g(x, y) = a$$

er gitt ved

$$\mathcal{L}'_x = 0, \quad \mathcal{L}'_y = 0, \quad g(x, y) = a$$

Et tillatt punkt har degenerert bibetingelse hvis

$$g'_x = 0, \quad g'_y = 0$$