Eksamen	MET 1180 Matematikk for siviløkonomer
Dato	19. desember 2022 kl 0900 - 1400

Eksamensoppgaven består av 16 deloppgaver som vektes likt. Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1.
Vi ser på et lineært system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med parameter a, der

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 5 & -9 \\ 4 & a & 10 & -18 \\ 1 & 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 22 \\ 3 \end{pmatrix}$$

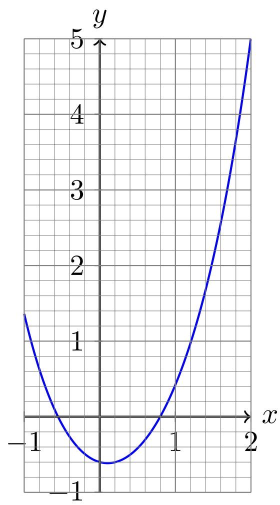
(a) **(6p)** Løs det lineære systemet når $a = 22$.
(b) **(6p)** Bestem de verdiene av a slik at det lineære systemet er konsistent.

Oppgave 2.
Regn ut disse integralene:

a) **(6p)** $\displaystyle\int_0^1 7x\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$ b) **(6p)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{9}{8+7x-x^2}\,\mathrm{d}x$ c) **(6p)** $\displaystyle\int \frac{1}{x-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

Figuren nedenfor viser grafen til $f'(x)$ for en funksjon f med definisjonsområde $D_f = [-1,2]$.

d) **(6p)** Estimer verdien av $f(1) - f(0)$. Begrunn svaret.
e) **(6p)** Finn x-koordinatene til maksimums- og minimumspunktene til f, hvis de eksisterer.



FIGUR 1. Grafen til $f'(x)$

La $I(x) = 100 \cdot 1.06^x$ være netto kontantstrøm etter x år (i millioner kroner per år) ved utleie av en eiendom. Vi regner dette som en kontinuerlig kontantstrøm, og bruker kontinuerlig diskontering med diskonteringsrente $r = 10\%$ når vi regner nåverdi.

f) **(6p)** Finn samlet nåverdi av leien i løpet av de første 10 årene.

Oppgave 3.
La matrisen A være gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 2 & a & 3 \\ 2 & 3 & a \end{pmatrix}$$

(a) **(6p)** Finn A^{-1} når $a = 1$.
(b) **(6p)** Regn ut determinanten $|A|$ for en vilkårlig verdi av a, og avgjør når $|A| = 0$.

Oppgave 4.
Vi ser på funksjonen f gitt ved $f(x,y) = (4 - x^2)(9 - y^2)$.

(a) **(6p)** Finn de stasjonære punktene til f.
(b) **(6p)** Regn ut Hesse-matrisen til f, og klassifiser de stasjonære punktene.
(c) **(6p)** Finn eventuelle maksimums- og minimumsverdier for f.

Oppgave 5.
Vi ser på Lagrange-problemet $\max f(x,y) = 2x + 4y$ når $2x^2 + 12x + 3y^2 - 24y = 30$.

(a) **(6p)** Lag en skisse av mengden $D = \{(x,y) : 2x^2 + 12x + 3y^2 - 24y = 30\}$. Er den begrenset?
(b) **(6p)** Bestem eventuelle punkter på D hvor tangenten har stigningstall $y' = -1/2$.
(c) **(6p)** Løs Lagrange-problemet, og finn maksimumsverdien hvis den eksisterer.

Formelark

Finansmatematikk

Geometriske rekker.
En endelig geometrisk rekke har sum

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-k^n}{1-k} = a_1 \cdot \frac{k^n-1}{k-1}$$

og en uendelige geometrisk rekke har sum

$$S = a_1 \cdot \frac{1}{1-k} \quad \text{når } |k| < 1$$

Nåverdier.
Nåverdien K_0 til en innbetaling K_n er

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n} \quad \text{og} \quad K_0 = \frac{K_n}{e^{rn}}$$

ved diskret og kontinuerlig diskonteringsrente.

Integrasjon

Integrasjonsmetoder.

a) Delvis integrasjon:

$$\int u'v \, \mathrm{d}x = uv - \int uv' \, \mathrm{d}x$$

b) Substitusjon:

$$\int f(u)u' \, \mathrm{d}x = \int f(u) \, \mathrm{d}u$$

c) Delbrøksoppspaltning:

$$\int \frac{px+q}{(x-a)(x-b)} \, \mathrm{d}x = \int \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \right) \mathrm{d}x$$

Areal.
Arealet til området begrenset av $a \leq x \leq b$ og $f(x) \leq y \leq g(x)$ er

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x)) \, \mathrm{d}x$$

Lineær algebra

Cramers regel.
Et lineært system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ der $|A| \neq 0$ har en entydig løsning gitt ved

$$x_1 = \frac{|A_1(\mathbf{b})|}{|A|} \quad x_2 = \frac{|A_2(\mathbf{b})|}{|A|} \quad \ldots \quad x_n = \frac{|A_n(\mathbf{b})|}{|A|}$$

der $A_i(\mathbf{b})$ framkommer ved å bytte ut kolonne i fra matrisen A med $\mathbf{b}$.

Funksjoner i to variabler

Andrederivert-testen.
Et stasjonært punkt (x^*, y^*) for funksjonen $f(x,y)$ er et

a) lokalt minimum når $A > 0$ og $AC - B^2 > 0$
b) lokalt maksimum når $A < 0$ og $AC - B^2 > 0$
c) sadelpunkt når $AC - B^2 < 0$

der $H(f)(x^*, y^*) = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ B & C \end{smallmatrix}\right)$.

Nivåkurver.
Nivåkurven $f(x,y) = c$ har derivert $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ gitt ved

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

Lagranges multiplikatormetode.
Lagrange-betingelsene for problemet

$$\max / \min f(x,y) \text{ når } g(x,y) = a$$

er gitt ved

$$\mathcal{L}'_x = 0, \ \mathcal{L}'_y = 0, \ g(x,y) = a$$

Et tillatt punkt har degenerert bibetingelse hvis

$$g'_x = 0, \ g'_y = 0$$