| | |
|---|---|
| Løsning | MET 1180 Matematikk for siviløkonomer |
| Dato | 24. mai 2023 kl 0900 - 1400 |

**Oppgave 1.**

(a) Vi skriver ned den utvidede matrisen til systemet, og bruker elementære radoperasjoner:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 & 11 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & 3 & -5 & -8 & -20 \\ 0 & 6 & -11 & -14 & -44 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & 3 & -5 & -8 & -20 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

Resultatet er en trappeform, og vi har markert pivotposisjonene som blå. Det er dermed uendelig mange løsninger, med $w$ fri når vi skriver $\mathbf{x} = (x,y,z,w)$ for de ukjente. Vi finner løsningene ved baklengs substitusjon: Fra siste likning finner vi $-z + 2w = -4$, eller $z = 2w + 4$. Neste likning gir $3y - 5(2w + 4) - 8w = -20$, eller $3y = 18w$, det vil si $y = 6w$. Første likning gir $x - (6w) + 3(2w + 4) + 4w = 11$, eller $x = -4w - 1$. Løsningene til det lineære systemet kan dermed skrives

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -4w - 1 \\ 6w \\ 2w + 4 \\ w \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

der $w$ er en fri variabel.

(b) Hvis vi bytter ut $\mathbf{b}$ med $\mathbf{0}$ i (a), finner vi at løsningene av det lineære systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er gitt ved $\mathbf{x} = w \cdot (-4,6,2,1)$ der $w$ er en fri variabel. Spesielt gir $w = 1$ løsningen $\mathbf{x} = (-4,6,2,1)$ av det lineære systemet, og det betyr at $-4\mathbf{v}_1 + 6\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$. Vi kan løse denne vektorlikningen for $\mathbf{v}_3$ og finner at

$$-2\mathbf{v}_3 = -4\mathbf{v}_1 + 6\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{v}_4$$

Alternativt kunne vi løst vektorlikningen $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_3$ ved å skrive den som et lineært system og bruke Gauss-eliminasjon.

**Oppgave 2.**

(a) Siden $(e^{2x})' = 2e^{2x}$ ved kjerneregelen, får vi $\int e^{2x}\,\mathrm{d}x = e^{2x}/2 + C$, og dermed

$$\int_0^1 1 + e^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[x + \frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = 1 + \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2}\left(e^2 + 1\right)$$

(b) Vi bruker substitusjonen $u = x + 1$, med $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$, og potensregelen for integrasjon:

$$\int 15x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x = \int 15(u-1)u^{1/2}\,\mathrm{d}u = \int 15u^{3/2} - 15u^{1/2}\,\mathrm{d}u = 6u^{5/2} - 10u^{3/2} + C$$

Dette gir

$$\int_0^1 15x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x = \left[6u^{5/2} - 10u^{3/2}\right]_1^2 = 6(4\sqrt{2} - 1) - 10(2\sqrt{2} - 1) = 4\sqrt{2} + 4$$

(c) Faktoriseringen $9 - x^2 = (3+x)(3-x)$ av nevner kan brukes til å finne en delbrøksoppspaltning:

$$\frac{3}{9 - x^2} = \frac{A}{3 - x} + \frac{B}{3 + x} \quad \Rightarrow \quad 3 = A(3 + x) + B(3 - x)$$

Dette gir $(A - B)x + (3A + 3B) = 3$, og dermed $A - B = 0$ og $3A + 3B = 3$. Vi finner dermed at $A = B$ og $6A = 3$, eller $A = 1/2$. Integralet blir da

$$\int \frac{3}{9 - x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1/2}{3 - x} + \frac{1/2}{3 + x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln|3 - x| + \frac{1}{2}\ln|3 + x| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{3 + x}{3 - x}\right| + C$$

Dette gir

$$\int_0^1 \frac{3}{9 - x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3 + x}{3 - x}\right|\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(4/2) = \frac{1}{2}\ln 2$$

(d) Vi har at $2x\ln(\sqrt{x}) = 2x \cdot \frac{1}{2}\ln x = x\ln x$ siden $\ln(x^{1/2}) = \frac{1}{2}\ln x$. Vi bruker så delvis integrasjon med $u' = x$ og $v = \ln(x)$, som gir $u = x^2/2$ og $v' = 1/x$. Siden $\int u'v \, dx = uv - \int uv' \, dx$ gir delvis integrasjon

$$\int x\ln(x) \, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

Dette gir

$$\int 2x\ln(\sqrt{x}) \, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

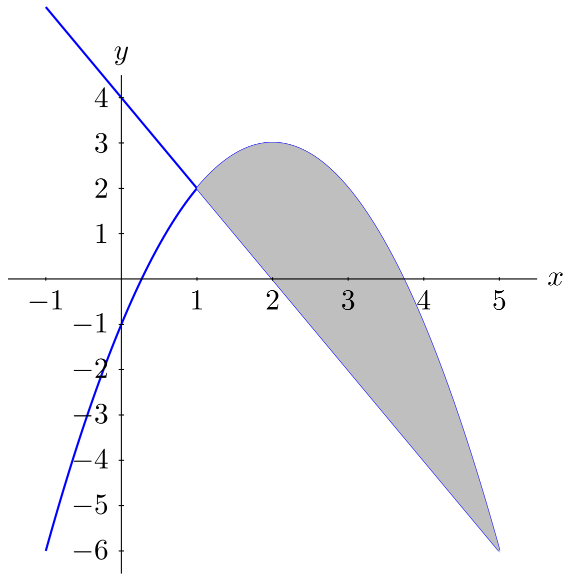
(e) Vi vet at parabelen P er grafen til en kvadratisk funksjon som kan skrives $f(x) = a(x-s)^2 + d$. Siden $x = 2 \pm \sqrt{3}$ er nullpunktene til $f$, er symmetrilinjen $x = 2$, og dermed er $s = 2$ og $f(x) = a(x-2)^2 + d$. Dessuten er $f(2 \pm \sqrt{3}) = 0$, og dette gir $a(\sqrt{3})^2 + d = 3a + d = 0$, eller $d = -3a$. Dette gir at $f(x) = a\left[(x-2)^2 - 3\right]$. Siden parabelen skjærer $y$-aksen i $y = -1$, har vi at $f(0) = a(4-3) = -1$, slik at $a = -1$. Vi får dermed at $f(x) = 3 - (x-2)^2$. Linjen L er grafen til funksjonen $g(x) = -2x + b$ siden den har stigningstall $-2$, og $b = 4$ siden $f(1) = 2$ og $g(1) = -2 + b$. Dermed blir $g(x) = 4 - 2x$. Skjæringspunktene er gitt ved

$$3 - (x-2)^2 = 4 - 2x \quad \Rightarrow \quad -x^2 + 6x - 5 = 0$$

Skjæringspunktene blir $x = 1$ og $x = 5$. Området (skravert) er vist på figuren nedenfor. Arealet av det skraverte området er

$$A = \int_1^5 f(x) - g(x) \, dx = \int_1^5 -x^2 + 6x - 5 \, dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x\right]_1^5$$

$$= \left(-\frac{125}{3} + 75 - 25\right) - \left(-\frac{1}{3} + 3 - 5\right) = -\frac{124}{3} + 50 + 2 = \frac{156 - 124}{3} = \frac{32}{3}$$




**Oppgave 3.**

(a) Vi bruker kofaktorutvikling langs første rad for å regne ut determinanten:

$$\begin{vmatrix} t & 2 & 4 \\ 2 & t & 4 \\ 2 & 4 & t \end{vmatrix} = t(t^2 - 16) - 2(2t - 8) + 4(8 - 2t) = (t-4)(t(t+4) - 4 - 8)$$

$$= (t-4)(t^2 + 4t - 12) = (t-4)(t+6)(t-2) = (t-2)(t-4)(t+6)$$

Vi har brukt at $t^2 - 16 = (t-4)(t+4)$ og at $t - 4$ er en felles faktor i kofaktorutviklingen. Vi kan også skrive determinanten som $|A| = t^3 - 28t + 48$.

(b) Når $t = 1$ får vi $\det(A) = (-1)(-3)7 = 21 \neq 0$, dermed har $A$ en invers matrise gitt ved

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_13 \\ C_{21} & C_{22} & C_23 \\ C_{31} & C_{32} & C_33 \end{pmatrix}^T$$

der $C_{ij}$ er konfaktoren til $A$ i posisjon $(i,j)$. Med $t = 1$ er den inverse matrisen gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} -15 & 6 & 6 \\ 14 & -7 & 0 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} -15 & 14 & 4 \\ 6 & -7 & 4 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(c) Det lineære systemet har én løsning når $|A| \neq 0$, og ingen eller uendelig mange løsninger når $|A| = 0$. Siden $|A| = 0$ for $t = 2, 4, -6$, ser vi at det lineære systemet har akkurat en løsning for alle verdier av $t$ bortsett fra $t = 2$, $t = 4$ og $t = -6$.

**Oppgave 4.**

(a) De partiellderiverte til $f(x,y) = x^2y + xy^2 - 3xy$ er $f'_x = 2xy + y^2 - 3y$ og $f'_y = x^2 + 2xy - 3x$, og førsteordensbetingelsene $f'_x = f'_y = 0$ er gitt ved

$$\begin{aligned} y(2x + y - 3) = 0 \quad &\Rightarrow \quad y = 0 \text{ eller } 2x + y = 3 \\ x(x + 2y - 3) = 0 \quad &\Rightarrow \quad x = 0 \text{ eller } x + 2y = 3 \end{aligned}$$

Dette gir fire tilfeller: $x = y = 0$, $y = 0$, $x + 2y = 3$, $x = 0$, $2x + y = 3$, eller $2x + y = x + 2y = 3$. De tre første tilfellene gir punktene $(x,y) = (0,0), (0,3), (3,0)$, og det siste tilfellet gir $(x,y) = (1,1)$. I det siste tilfellet kan vi for eksempel bruke Gauss-eliminasjon til å finne løsningen. Vi konkluderer med at vi har fire stasjonære punkter for $f$:

$$(x,y) = (0,0), (0,3), (3,0), (1,1)$$

(b) Hessematrisen til $f$ i et generelt punkt er gitt ved

$$H(f) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2x + 2y - 3 \\ 2x + 2y - 3 & 2x \end{pmatrix}$$

Vi setter inn de tre første stasjonære punktene $(x,y) = (0,0), (0,3), (3,0)$ i Hessematrisen og får

$$H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad H(f)(3,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad H(f)(0,3) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

I alle tre tilfellene er det $H(f) = -9 < 0$, og dermed er $(0,0), (3,0), (0,3)$ sadelpunkter for $f$. I punktet $(1,1)$ får vi Hessematrisen

$$H(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Siden $\det H(f)(1,1) = 4 - 1 = 3 > 0$ og $\operatorname{tr} H(f)(1,1) = 2 + 2 = 4 > 0$, er $(1,1)$ et lokalt minimum for $f$. Siden $f$ ikke har lokale maksimspunkter, har $f$ heller ikke maksimsverdi. Den eneste kandidaten for en minimumsverdi for $f$ finner vi i det lokalt minimumspunktet $(1,1)$ med funksjonsverdi $f(1,1) = -1$. Men siden $f(-2,-2) = -8 - 8 - 12 = -28 < -1$, er ikke dette et globalt minimum for $f$. Vi slutter dermed at $f$ har hverken maksimums- eller minimumsverdi.

**Oppgave 5.**

(a) Vi bruker Lagranges metode med $\mathcal{L} = xy - \lambda(x^2 + y^2 + x^2y^2 - 3)$ for å finne kandidatpunkter. Lagrange-betingelsene er

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_x = y - \lambda(2x + 2xy^2) &= 0 \\ \mathcal{L}'_y = x - \lambda(2y - 2x^2y) &= 0 \\ x^2 + y^2 + x^2y^2 &= 3 \end{aligned}$$

Vi løser de to første likningene for $\lambda$. Dette gir

$$\lambda = \frac{y}{2x(1 + y^2)} = \frac{x}{2y(1 + x^2)}$$

Vi har brukt faktoriseringene $2x + 2xy^2 = 2x(1 + y^2)$ og $2y + 2x^2y = 2y(1 + x^2)$ i uttrykkene ovenfor. Vi merker oss at en av nevnerene blir null hvis $x = 0$ eller $y = 0$. Men $x = 0$ gir $y = 0$ i første betingelse, og $y = 0$ gir $x = 0$ fra andre betingelse. Siden $(x,y) = (0,0)$ ikke passer i bibetingelsene, mister vi ikke løsninger ved å bruke brøkuttrykkene over. Kryssmultiplisering (eller multiplikasjon med fellesnevner) gir dermed

$$y \cdot 2y(1+x^2) = x \cdot 2x(1+y^2) \quad \Rightarrow \quad 2y^2 + 2y^2x^2 = 2x^2 + 2x^2y^2 \quad \Rightarrow \quad 2y^2 = 2x^2$$

Dermed må $y^2 = x^2$. Setter vi dette inn i bibetingelsen får vi $x^2+x^2+x^4 = 3$, eller $x^4+2x^2-3 = 0$. Dette kan skriver

$$x^4 + 2x^2 - 3 = (x^2+3)(x^2-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1$$

siden $x^2+3 > 0$ for alle $x$. Dermed er $x = \pm 1$, og $y^2 = x^2$ slik at $y = \pm 1$, og for hver av de fire kombinasjonene av fortegn finner vi $\lambda$ ved brøkuttrykket ovenfor. Vi finner dermed følgende fire punkter som oppfyller Lagrangebetingelsene:

$$(x,y;\lambda) = (1,1;1/4), (-1,-1;1/4), (1,-1;-1/4), (-1,1;-1/4)$$

(b) Et punkt har degenerert bibetingelse hvis $g'_x = g'_y = 0$, hvor $g(x,y) = x^2+y^2+x^2y^2$. Dette gir

$$g'_x = 2x + 2xy^2 = 0,\ g'_y = 2y + 2x^2y = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x(1+y^2) = 2y(1+x^2) = 0$$

Siden $1+y^2, 1+x^2 > 0$ for alle $x,y$ betyr dette at $x = y = 0$. Men punktet $(x,y) = (0,0)$ passer er ikke tillatt siden det ikke passer i bibetingelsen; $g(0,0) = 0 \neq 3$. Vi konkluderer at det ikke finnes tillatte punkter med degenerert bibetingelse i dette problemet.

(c) Merk at mengden $D$ av tillatte punkter, gitt ved likningen $g(x,y) = x^2+y^2+x^2y^2 = 3$, er en kompakt mengde: Den er lukket siden den er gitt ved en likning, og den er begrenset siden $-\sqrt{3} \le x,y \le \sqrt{3}$ for alle punkt $(x,y)$ i $D$. Dette kan vi se på følgende måte: Siden $x^2+y^2+x^2y^2 = 3$ og hvert av leddene $x^2, y^2, x^2y^2 \ge 0$ siden de er kvadrater, må vi ha $x^2, y^2, x^2y^2 \le 3$. Fra $x^2 \le 3$ følger det at $-\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$, og tilsvarende følger det fra $y^2 \le 3$ at $-\sqrt{3} \le y \le \sqrt{3}$. Fra Ekstremverdisetningen følger det at Lagrangeproblemet har et maksimum, og det må være et av kandidatpunktene vi fant i (a) siden det ikke er tillatte punkter med degenerert bibetingelse. Siden $f(1,1) = f(-1,-1) = 1$ og $f(-1,1) = f(-1,1) = -1$, følger det at maksimumsverdien er $f_{\max} = 1$ i punktene $(x,y) = (1,1), (-1,-1)$ med $\lambda = 1/4$.