

Eksamensoppgaven består av 15 deloppgaver med lik vekt. Alle svar skal begrunnes.

### Oppgave 1.

Vi ser på matrisen  $A$  og vektoren  $\mathbf{b}$  gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

og kaller kolonnevektorene til  $A$  for  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ .

- (a) Bruk Gauss-eliminering til å løse det lineære systemet  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ .
- (b) Skriv  $\mathbf{v}_3$  som en lineærkombinasjon av vektorene  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4$  hvis det er mulig.

### Oppgave 2.

Regn ut disse integralene:

$$\text{a) } \int_0^1 1 + e^{2x} dx \quad \text{b) } \int_0^1 15x\sqrt{x+1} dx \quad \text{c) } \int_0^1 \frac{3}{9-x^2} dx \quad \text{d) } \int 2x \ln(\sqrt{x}) dx$$

Parabelen  $P$  skjærer  $x$ -aksen i  $x = 2 \pm \sqrt{3}$  og  $y$ -aksen i  $y = -1$ . Den rette linjen  $L$  har stigningstall  $-2$  og skjærer  $P$  i  $x = 1$ .

- e) Finn arealet av området som er avgrenset av  $P$  og  $L$ . Vis figur.

### Oppgave 3.

La matrisen  $A$  og vektoren  $\mathbf{b}$  være gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} t & 2 & 4 \\ 2 & t & 4 \\ 2 & 4 & t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Regn ut  $|A|$ .
- (b) Finn  $A^{-1}$  når  $t = 1$ .
- (c) Bestem alle verdier av  $t$  slik at  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  har akkurat en løsning.

### Oppgave 4.

Vi ser på funksjonen  $f$  gitt ved  $f(x,y) = x^2y + xy^2 - 3xy$ .

- (a) Finn de stasjonære punktene til  $f$ .
- (b) Klassifiser de stasjonære punktene. Har  $f$  maksimums- eller minimumsverdier?

### Oppgave 5.

Vi ser på Lagrange-problemet  $\max f(x,y) = xy$  når  $x^2 + y^2 + x^2y^2 = 3$ .

- (a) Skriv ned de tre Lagrange-betingelsene, og finn alle punkt  $(x,y;\lambda)$  som oppfyller disse.
- (b) Er det noen tillatte punkter med degenerert bibetingelse i dette problemet?
- (c) Avgjør om Lagrange-problemet har en maksimumsverdi, og finn i så fall maksimumsverdien.

# Formelark

## FINANSMATEMATIKK

### Geometriske rekker.

En endelig geometrisk rekke har sum

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - k^n}{1 - k} = a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}$$

og en uendelige geometrisk rekke har sum

$$S = a_1 \cdot \frac{1}{1 - k} \quad \text{når } |k| < 1$$

### Nåverdier.

Nåverdien  $K_0$  til en innbetaling  $K_n$  er

$$K_0 = \frac{K_n}{(1 + r)^n} \quad \text{og} \quad K_0 = \frac{K_n}{e^{rn}}$$

ved diskret og kontinuerlig diskonteringsrente.

## INTEGRASJON

### Integrasjonsmetoder.

a) Delvis integrasjon:

$$\int u'v \, dx = uv - \int uv' \, dx$$

b) Substitusjon:

$$\int f(u)u' \, dx = \int f(u) \, du$$

c) Delbrøksoppspaltning:

$$\begin{aligned} \int \frac{px + q}{(x - a)(x - b)} \, dx \\ = \int \left( \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b} \right) \, dx \end{aligned}$$

### Areal.

Arealet til området begrenset av  $a \leq x \leq b$  og  $f(x) \leq y \leq g(x)$  er

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x)) \, dx$$

## LINEÆR ALGEBRA

### Cramers regel.

Et lineært system  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  der  $|A| \neq 0$  har en entydig løsning gitt ved

$$x_1 = \frac{|A_1(\mathbf{b})|}{|A|} \quad x_2 = \frac{|A_2(\mathbf{b})|}{|A|} \quad \dots \quad x_n = \frac{|A_n(\mathbf{b})|}{|A|}$$

der  $A_i(\mathbf{b})$  framkommer ved å bytte ut kolonne  $i$  fra matrisen  $A$  med  $\mathbf{b}$ .

## FUNKSJONER I TO VARIABLER

### Andrederivert-testen.

Et stasjonært punkt  $(x^*, y^*)$  for funksjonen  $f(x, y)$  er et

- lokalt minimum når  $A > 0$  og  $AC - B^2 > 0$
- lokalt maksimum når  $A < 0$  og  $AC - B^2 > 0$
- sadelpunkt når  $AC - B^2 < 0$

der  $H(f)(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ .

### Nivåkurver.

Nivåkurven  $f(x, y) = c$  har derivert  $y' = dy/dx$  gitt ved

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

### Lagranges multiplikatormetode.

Lagrange-betingelsene for problemet

$$\max / \min f(x, y) \quad \text{når} \quad g(x, y) = a$$

er gitt ved

$$\mathcal{L}'_x = 0, \quad \mathcal{L}'_y = 0, \quad g(x, y) = a$$

Et tillatt punkt har degenerert bibetingelse hvis

$$g'_x = 0, \quad g'_y = 0$$