Løsning	MET 1180 Matematikk for siviløkonomer
Dato	18. desember 2023 kl 0900 - 1400

Oppgave 1.

(a) Vi skriver ned den utvidede matrisen til systemet, og bruker elementære radoperasjoner:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 7 & 14 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Resultatet er en trappeform, og vi har markert pivotposisjonene som blå. Det er dermed uendelig mange løsninger, med y og w fri når vi skriver $\mathbf{x} = (x,y,z,w)$ for de ukjente. Vi finner løsningene ved baklengs substitusjon, der vi ser bort fra nullraden nederst som gir en triviell likning: Fra andre likning finner vi $3z + w = 6$, eller $z = (6 - w)/3 = 2 - w/3$. Den første likningen gir $x+2y+z+3w = 4$, eller $x = 4-2y-(2-w/3)-3w = 2-2y-8w/3$. Løsningene til det lineære systemet kan dermed skrives

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2-2y-8w/3 \\ y \\ 2-w/3 \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{w}{3}\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

der y,w er frie variabler.

(b) Vi vet at $\mathbf{w}$ er en lineærkombinasjon av kolonnevektorene i A hvis og bare hvis det lineære systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{w}$ har løsninger. Vi gjentar derfor radoperasjonene ovenfor med $\mathbf{b}$ byttet ut med $\mathbf{w}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & a \\ 2 & 4 & 5 & 7 & b \\ 1 & 2 & 4 & 4 & c \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & a \\ 0 & 0 & 3 & 1 & b-2a \\ 0 & 0 & 3 & 1 & c-a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & a \\ 0 & 0 & 3 & 1 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (c-a)-(b-2a) \end{array}\right)$$

Siden $(c-a)-(b-2a) = a-b+c$, har vi at det lineære systemet har uendelig mange løsninger (to frihetsgrader) hvis $a - b + c = 0$, og ingen løsninger ellers (siden vi da har en pivot i siste kolonne). Derfor er $\mathbf{w}$ en lineærkombinasjon av kolonnevektorene i A for de verdiene av (a,b,c) hvor $a - b + c = 0$.

Oppgave 2.

(a) Vi bruker delvis integrasjon med $u' = 4x$ og $v = \ln x$, og dermed $u = 2x^2$ og $v' = 1/x$, til å regne ut det ubestemte integralet

$$\int 4x \ln x \, \mathrm{d}x = 2x^2 \ln x - \int 2x^2 \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = 2x^2 \ln x - \int 2x \, \mathrm{d}x = 2x^2 \ln x - x^2 + C$$

Det bestemte integralet får dermed verdien

$$\int_1^2 4x \ln x \, \mathrm{d}x = \left[2x^2 \ln x - x^2\right]_1^2 = 8\ln 2 - 4 - (-1) = 8\ln 2 - 3$$

(b) Vi bruker substitusjonen $u = x + 1$, med $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ og $x = u - 1$, og potensregelen for integrasjon, og får at

$$\int_0^1 \frac{3x}{\sqrt{x+1}} \, \mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{3(u-1)}{\sqrt{u}} \, \mathrm{d}u = 3\int_1^2 u^{1/2} - u^{-1/2} \, \mathrm{d}u = 3\left[\frac{2}{3}u^{3/2} - 2u^{1/2}\right]_1^2$$

siden de nye grensene i det bestemte integralet er gitt ved at $x = 0$ gir $u = 1$ og $x = 1$ gir $u = 2$. Dette gir

$$\int_0^1 \frac{3x}{\sqrt{x+1}} \, \mathrm{d}x = \left[2u^{3/2} - 6u^{1/2}\right]_1^2 = 4\sqrt{2} - 6\sqrt{2} - 2 - (-6) = 4 - 2\sqrt{2}$$

(c) Faktoriseringen $x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$ av nevner kan brukes til å finne en delbrøksoppspaltning:

$$\frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \quad \Rightarrow \quad x = A(x-3) + B(x-2)$$

Dette gir $(A+B)x + (-3A-2B) = x$, og dermed $A+B = 1$ og $-3A-2B = 0$. Vi finner dermed at $B = 3$ (for eksempel ved å legge til 3 ganger første likning til andre likning), og dermed blir $A = -2$. Dette gir integralet

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{-2}{x-2} + \frac{3}{x-3}\,\mathrm{d}x = [-2\ln|x-2| + 3\ln|x-3|]_0^1$$
$$= (-2\ln 1 + 3\ln 2) - (-2\ln 2 + 3\ln 3) = 5\ln 2 - 3\ln 3$$

(d) Vi løser $\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ ved substitusjonen $u = \sqrt{x}$, som gir $\mathrm{d}u = u'\,\mathrm{d}x$ med $u' = 1/(2\sqrt{x})$. Dette gir

$$\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int e^u \cdot (2\sqrt{x})\,\mathrm{d}u = \int e^u \cdot 2u\,\mathrm{d}u = \int 2u\,e^u\,\mathrm{d}u$$

For å løse dette integralet, bruker vi delvis integrasjon med $v' = e^u$ og $w = 2u$, som gir $v = e^u$ og $w' = 2$ (vi bruker symbolene v og w istedet for u og v, siden u allerede er brukt i substitusjonen):

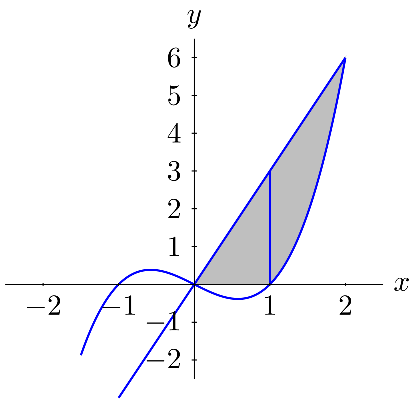
$$\int 2ue^u\,\mathrm{d}u = 2ue^u - \int 2\cdot e^u\,\mathrm{d}u = 2ue^u - 2e^u + \mathcal{C} = (2\sqrt{x}-2)e^{\sqrt{x}} + \mathcal{C}$$

(e) Grafen til $f(x) = x^3 - x$ har nullpunkt gitt ved $x^3 - x = x(x^2-1) = 0$ som gir $x = -1, 0, 1$. Grafen er under x-aksen i intervallet (0,1) og over x-aksen for $x > 1$. Linjen L har likning $y = 3x$ og skjæring med grafen til f er gitt ved

$$x^3 - x = 3x \quad \Rightarrow \quad x^3 - 4x = x(x^2-4) = 0$$

Skjæringspunktene er derfor $x = -2$, $x = 0$, og $x = 2$. Området R ligger derfor mellom linjen L og x-aksen i intervallet [0,1], og mellom linjen L og grafen til f i intervallet [1,2]. Området er vist (skravert felt) i figuren nedenfor, og arealet av området R er gitt ved

$$A(R) = \int_0^1 3x\,\mathrm{d}x + \int_1^2 3x - (x^3 - x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{2}x^2\right]_0^1 + \int_1^2 4x - x^3\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{3}{2} + \left[2x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_1^2 = \frac{3}{2} + (8-4) - (2 - \frac{1}{4}) = 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{15}{4} = 3.75$$



Oppgave 3.

(a) Vi bruker kofaktorutvikling langs første rad for å regne ut determinanten:

$$\begin{vmatrix} t & 1 & t \\ 1 & t & 2 \\ t & 2 & t \end{vmatrix} = t(t^2-4) - 1(t-2t) + t(2-t^2) = t^3 - 4t + t + 2t - t^3 = -t$$

(b) Når $t = 1$ får vi $\det(A) = -1 \neq 0$, dermed har A en invers matrise gitt ved

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}^T$$

der C_{ij} er konfaktoren til A i posisjon (i,j). Med $t = 1$ er den inverse matrisen gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Det lineære systemet har eksakt en løsning når $|A| = -t \neq 0$, det vil si for $t \neq 0$. Vi ser på tilfellet $t = 0$: Det lineære systemet har uendelig mange løsninger i dette tilfellet siden $|A| = 0$ og $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, det vil si ingen pivotposisjon i siste kolonne og minst en frihetsgrad. Vi konkluderer med at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har minst en løsning for alle verdier av t.

Oppgave 4.

(a) Funksjonen f er definert for alle (x,y) slik at $x + y + 1 \neq 0$, det vil si $x + y \neq -1$. Vi regner ut de partiellderiverte til f ved å bruke kvotientregelen for derivasjon:

$$f'_x = \frac{yu - xy \cdot 1}{u^2} = \frac{y(x+y+1) - xy}{u^2} = \frac{y(y+1)}{u^2}$$
$$f'_y = \frac{xu - xy \cdot 1}{u^2} = \frac{x(x+y+1) - xy}{u^2} = \frac{x(x+1)}{u^2}$$

Vi skriver $u = x + y + 1$ for nevneren for å skrive uttrykkene litt kortere. De stasjonære punktene er gitt ved $f'_x = f'_y = 0$, som gir $y(y+1) = 0$ og $x(x+1) = 0$. Dermed er $x = 0$ eller $x = -1$, og $y = 0$ eller $y = -1$, og vi får punktene $(x,y) = (0,0), (-1,0), (0,-1), (-1,-1)$. Vi ser at i disse punktene så er $u = 1$ i $(0,0)$, $u = 0$ i $(0,-1)$ og $(-1,0)$, og $u = -1$ i $(-1,-1)$. Dermed er de stasjonære punktene for f kun punktene

$$(x,y) = (0,0), (-1,-1)$$

(b) For å bruke andrederivert-testen, finner vi Hesse-matrisen i de to stasjonære punktene. Vi starter med å regne ut de andre ordens partiellderiverte:

$$f''_{xx} = \left(\frac{y(y+1)}{u^2}\right)'_x = y(y+1) \cdot (-2)u^{-3} \cdot 1 = \frac{-2y(y+1)}{u^3}$$
$$f''_{xy} = \left(\frac{y(y+1)}{u^2}\right)'_y = \frac{(2y+1) \cdot u^2 - y(y+1) \cdot 2u \cdot 1}{u^4}$$
$$= \frac{(2y+1)(x+y+1) - 2y(y+1)}{u^3} = \frac{2xy + x + y + 1}{u^3}$$
$$f''_{yy} = \left(\frac{x(x+1)}{u^2}\right)'_y = x(x+1) \cdot (-2)u^{-3} \cdot 1 = \frac{-2x(x+1)}{u^3}$$

Vi ser at $f''_{xx} = f''_{yy} = 0$ for hvert av de to stasjonære punktene siden $x(x+1) = y(y+1) = 0$. Vi bruker uttrykket for f''_{xy} ovenfor til å bestemme Hessematrisen i de to stasjonære punktene:

$$H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H(f)(-1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Siden determinanten til de to matrisene er -1, så er de stasjonære punktene for f sadelpunkter. Siden dette er de eneste kandidatene for maksimum og minimum for f, har f hverken maksimums- eller minimumsverdi.

Oppgave 5.

(a) Vi bruker Lagranges metode med $\mathcal{L} = x - y - \lambda(x^2 + xy + y^2 - 3)$ for å finne kandidatpunkter. Lagrange-betingelsene er

$$\mathcal{L}'_x = 1 - \lambda(2x + y) = 0$$
$$\mathcal{L}'_y = -1 - \lambda(x + 2y) = 0$$
$$x^2 + xy + y^2 = 3$$

Vi forsøker å finne x og y uttrykt ved hjelp av λ fra de to første likningene. Vi får i første omgang at

$$2x + y = 1/\lambda, \quad x + 2y = -1/\lambda$$

For å forenkle skrivemåten, skriver vi $t = 1/\lambda$. Vi løser så de to likningene for x og y, for eksempel ved hjelp av Gauss-eliminasjon:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & t \\ 1 & 2 & -t \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -t \\ 2 & 1 & t \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -t \\ 0 & -3 & 3t \end{array}\right)$$

Dette gir ved baklengs substitusjon at $-3y = 3t$, eller $y = -t$, og $x + 2(-t) = -t$, eller $x = t$. Vi setter så disse uttrykkene inn i bibetingelsen og får at $x^2 + xy + y^2 = t^2 + t(-t) + (-t)^2 = 3$, eller $t^2 = 3$, som gir $t = \pm\sqrt{3}$. Siden $t = 1/\lambda$, blir $\lambda = 1/t = \pm 1/\sqrt{3}$. Dette gir disse kandidatpunktene:

$$(x,y;\lambda) = (\sqrt{3}, -\sqrt{3}; 1/\sqrt{3}),\ (-\sqrt{3}, \sqrt{3}; -1/\sqrt{3})$$

med $f(\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$ og $f(-\sqrt{3},\sqrt{3}) = -2\sqrt{3}$.

(b) Et punkt har degenerert bibetingelse hvis $g'_x = g'_y = 0$, hvor $g(x,y) = x^2 + xy + y^2$. Dette gir

$$g'_x = 2x + y = 0,\ g'_y = x + 2y = 0$$

Dette gir $y = -2x$ fra første likning, og $x + 2(-2x) = 0$, eller $-3x = 0$ innsatt i andre likning. Den eneste punktet med degenerert bibetingelse er derfor $(x,y) = (0,0)$, og dette er ikke et tillatt punkt siden $g(0,0) = 0 \neq 3$. Vi konkluderer at det ikke finnes tillatte punkter med degenerert bibetingelse i dette problemet.

(c) Merk at mengden D av tillatte punkter, gitt ved likningen $g(x,y) = x^2 + xy + y^2 = 3$, er en kompakt mengde: Den er lukket siden den er gitt ved en likning, og den er også begrenset: For å se det, skriver vi likningen på følgende måte ved å fullføre kvadratet:

$$x^2 + xy + y^2 = (x + \frac{1}{2}y)^2 + y^2 - \frac{1}{4}y^2 = (x + \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 3$$

Siden venstresiden er en sum av kvadrater, må vi ha at $(x + y/2)^2 \leq 3$ og $3y^2/4 \leq 3$. Den siste ulikheten gir $y^2 \leq 4$, dvs $-2 \leq y \leq 2$. Og for hver y-verdi i dette intervallet, må vi ha at $-\sqrt{3} \leq x + y/2 \leq \sqrt{3}$, det vil si $-\sqrt{3} - y/2 \leq x \leq \sqrt{3} - y/2$. Ved å bruke intervallet med mulige y-verdier, ser vi at $-\sqrt{3} - 1 \leq x \leq \sqrt{3} + 1$. Vi konkluderer at mengden av tillatte punkter er begrenset, og derfor kompakt. Ved ekstremverdisetningen har problemet et maksimum, og de eneste kandidatene til maksimum er de vi fant i (a). Dermed har vi at

$$f_{\max} = f(\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$$

siden dette kandidatpunktet har størst f-verdi av de to punktene.