

Eksamensoppgaven består av 15 deloppgaver med lik vekt. Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1.

La matrisen A og vektoren \mathbf{b} være gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ t & 0 & 1 \\ 1 & t & t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Regn ut determinanten til A , og faktorer uttrykket du får.
- Finn A^{-1} når $t = -1$.
- Løs likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ for \mathbf{x} når $t = -1$.

Oppgave 2.

Vi ser på matrisen A og vektoren \mathbf{b} gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & 10 & -10 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

og kaller kolonnevektorene til A for $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$.

- Bruk Gauss-eliminasjon til å løse det lineære systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
- Skriv \mathbf{b} som en lineærkombinasjon av vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ hvis det er mulig.

Oppgave 3.

Regn ut disse integralene:

$$\text{a) } \int 3xe^x dx \qquad \text{b) } \int \frac{3x+1}{x^2-x-6} dx \qquad \text{c) } \int_1^4 \frac{5}{\sqrt{x+3}} dx$$

La $I(x) = 300 \cdot e^{0,05x}$ være kontantstrømmen etter x år ved utleie av en eiendom. Vi regner dette som en kontinuerlig kontantstrøm, og bruker kontinuerlig diskontering (forrentning) med diskonteringsrente $r = 8\%$ når vi regner nåverdi.

- Finn samlet nåverdi av leien i løpet av de første seks årene.

Oppgave 4.

Vi ser på funksjonen f gitt ved $f(x, y) = (x - 3)^2 + 4y^2$.

- Finn de stasjonære punktene til f . Regn ut Hesse-matrisen til f og bruk denne til å klassifisere eventuelle stasjonære punkter.
- Tegn nivåkurver for $f(x, y)$ på nivåene $c = 16, 4$ og 0 . Bruk denne figuren til å forklare hvorvidt f har maksimums- og/eller minimumsverdier.
- Anta at vi i stedet ser på optimeringsproblemet $\max/\min f(x, y)$ med begrensningen $0,5x + y = 4$. Tegn denne begrensningen i samme koordinatsystem som nivåkurvene. Bruk figuren til å estimere maksimums- og/eller minimumsverdier for Lagrange-problemet.

Oppgave 5.

Vi ser på Lagrange-problemet $\max/\min f(x, y) = x^2y^2 + 22x^2 + 2y^2$ når $x^2 + y^2 = 52$.

- Finn alle punkter $(x, y; \lambda)$ som oppfyller Lagrange-betingelsene.
- Hva sier Ekstremverdisetningen? Kan den brukes på dette Lagrange-problemet?
- Løs Lagrange-problemet. Husk å gi en fullstendig begrunnelse for svaret ditt.

Formelark

FINANSMATEMATIKK

Geometriske rekker.

En endelig geometrisk rekke har sum

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - k^n}{1 - k} = a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}$$

og en uendelige geometrisk rekke har sum

$$S = a_1 \cdot \frac{1}{1 - k} \quad \text{når } |k| < 1$$

Nåverdier.

Nåverdien K_0 til en innbetaling K_n er

$$K_0 = \frac{K_n}{(1 + r)^n} \quad \text{og} \quad K_0 = \frac{K_n}{e^{rn}}$$

ved diskret og kontinuerlig forrentning (diskontering).

INTEGRASJON

Integrasjonsmetoder.

a) Delvis integrasjon:

$$\int u'v \, dx = uv - \int uv' \, dx$$

b) Substitusjon:

$$\int f(u)u' \, dx = \int f(u) \, du$$

c) Delbrøksoppspaltning:

$$\begin{aligned} \int \frac{px + q}{(x - a)(x - b)} \, dx \\ = \int \left(\frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b} \right) \, dx \end{aligned}$$

Areal.

Arealet til området begrenset av $a \leq x \leq b$ og $f(x) \leq y \leq g(x)$ er

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x)) \, dx$$

LINEÆR ALGEBRA

Cramers regel.

Et lineært system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ der $|A| \neq 0$ har en entydig løsning gitt ved

$$x_1 = \frac{|A_1(\mathbf{b})|}{|A|} \quad x_2 = \frac{|A_2(\mathbf{b})|}{|A|} \quad \dots \quad x_n = \frac{|A_n(\mathbf{b})|}{|A|}$$

der $A_i(\mathbf{b})$ er matrisen som framkommer ved å bytte ut kolonne i fra matrisen A med \mathbf{b} .

FUNKSJONER I TO VARIABLER

Andrederivert-testen.

Et stasjonært punkt (x^*, y^*) for funksjonen $f(x, y)$ er et

- lokalt minimum når $A > 0$ og $AC - B^2 > 0$
- lokalt maksimum når $A < 0$ og $AC - B^2 > 0$
- salpunkt når $AC - B^2 < 0$

der $H(f)(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$.

Nivåkurver.

Stigningstallet $y' = dy/dx$ til tangentlinjen til nivåkurven $f(x, y) = c$ er gitt ved

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

Lagranges multiplikatormetode.

Lagrange-betingelsene for problemet

$$\max/\min f(x, y) \quad \text{når} \quad g(x, y) = a$$

er gitt ved

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y), \quad g(x, y) = a$$

Et tillatt punkt har degenerert bibetingelse hvis

$$g'_x = 0, \quad g'_y = 0$$