Eksamensoppgavesamling med løsningsforslag i

Matematikk

for
siviløkonomstudiet

av
Tron Foss

Institutt for samfunnsøkonomi
2005

ISBN 82 7042 745 4

9 788270 427451

Forord

Denne eksamensoppgavesamlingen inneholder en rekke tidligere eksamenssett, mange med fullstendige løsningsforslag.

På grunn av endring i pensum er noen av oppgavene fjernet fra en del av settene. Man bør merke seg at arbeidsmengden på et eksamenssett hvor en oppgave er fjernet kan ha blitt betydelig redusert.

Oslo september 2005.

Tron Foss

INNHOLD

BEDRIFTSØKONOMISK INSTITUTT F

BEKKESTUA

Eksamen i

MET 1035 MATEMATIKK
SIVIØKONOMSTUDIET

06.06.87, kl. 0900 - 1400

Tillatte hjelpemidler:
Knut Sydsæter: formel samling.
Oppgaven er på 2 sider.
Innføringsark - Ruteark

Oppgave 1

a) Deriver funksjonene

i) $f(x) = \ln(2x+1)$ ii) $g(x) = x^2 e^{-x^2}$

b) Løs følgende likninger og ulikheter

i) $|x+1| > |x + 2|$ ii) $x^4 + x^2 - 6 = 0$

iii) $\ln\left(\frac{x+3}{x-1}\right) < 0$ iv) $(x^2-2x-3)e^x > 0$

c) Løs følgende integraler

i) $\int\left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x\right)dx$ ii) $\int_e^{2e} \frac{x^2-3x+5}{x}\,dx$

Oppgave 2

En funksjon av to variabler er definert for alle x og y ved
$f(x,y) = 3x^2 - 3xy^2 + y^3 + 3y^2$

a) Finn de partiellderiverte av 1. og annen orden.

b) Vis at de stasjonære punktene er $(0,0)$ $(2,2)$ og $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$

c) Klassifiser de stasjonære punktene.

d) Gitt bibetingelsen $x+y=1$, $0 \leq x \leq 3$
Finn maksimum og minimum av $f(x,y)$ under de gitte bibetingelser.

Oppgave 3

Funksjonen f er gitt ved
$f(x) = \frac{4\ln x}{x^2}$, $D_f = \langle 0, \infty\rangle$

a) Bestem fortegnet til $f(x)$ når x varierer

b) Finn $f'(x)$ og avgjør hvor f vokser og hvor f avtar.

c) Bestem eventuelle ekstremalpunkter for f med de tilhørende ekstremalverdier.

d) Finn $f''(x)$ og finn eventuelle vendepunkter på grafen.

e) Skisser grafen til f. Opplysning $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.

f) Vis at $\int \frac{\ln x}{x^2} dx = - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$

Bruk dette resultatet til å regne ut arealet til venstre for den rette linja x=e som er avgrenset av grafen til f, x-aksen og den rette linja x=e.

Oppgave 4 (utgår)

Oppgave 5

a) Beregn determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 & a \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

b) Gitt de tre matrisene A, B, og C

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Beregn $(A - B)$ og $(A - B)^{-1}$

c) Benytt resultatet fra b) til å finne en matrise X slik at: $AX = BX + C$

Fasit til Met 1035 MAREMATIKK 06.06.87

1 a) i) $\frac{2}{2x+1}$ ii) $2xe^{-x^2}(1-x^2)$

b) i) $x < -3/2$ ii) $x = -\sqrt{2}$ eller $x = \sqrt{2}$
iii) $x < -3$ iv) $L = \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 3, \infty\rangle$

c) i) $(1/16)x^4 + (1/4)x^2 + C$ ii) $3e^2/2 - 3e + 5\ln 2$

2 a) $f'_x = 6x - 3y^2$ $f'_y = -6xy + 3y^2 + 6y$

$f''_{xx} = 6$ $f''_{xy} = -6y$ $f''_{yy} = -6x + 6y + 6$

c) (0,0) lokalt minimum, (2,2) og (1/2,-1) er sadelpunkter

d) (3,-2,-5) globalt minimum, (2,-1,8) globalt maksimum

3 a) $f(x) < 0$ når $0 < x < 1$, $f(1) = 0$, $f(x) > 0$ når $x > 1$

b) $f'(x) = \frac{8(1/2 - \ln x)}{x^3}$ f(x) vokser i $\langle 0, \sqrt{e}]$

f(x) avtar i $[\sqrt{e}, \infty\rangle$

c) $x = \sqrt{e}$ er et maksimum, $f(\sqrt{e}) = 2/e$

d) $f''(x) = \frac{24(\ln x - 5/6)}{x^4}$

$x = e^{5/6}$ er et vendepunkt, $f(e^{5/6}) = \frac{10}{3e^{5/3}}$

f) Arealet er $4 - 8/e = 1.05$

5 a) 1 b) $A-B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ $(A-B)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3/2 & -1 & -1/2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

BEDRIFTSØKONOMISK INSTITUTT

F

BEKKESTUA

Eksamen i

MET 1035 MATEMATIKK

SIVIØKONOMSTUDIET

07.12.87, kl. 0900 - 1400

Tillatte hjelpemidler:
Knut Sydsæter: formel samling.

Oppgaven er på 3 sider.

Innføringsark - Ruteark

Oppgave 1

Løs ligningene m.h.p. x :

a) $x^3 + 5x^2 = 0$

b) $x^3 + 5x^2 + 6x = 0$

c) $\frac{e^{2x}}{e} = e^x$

d) $\ln(6x-1) + \ln x = 0$

Oppgave 2

Deriver

a) $y = \frac{x^3}{x^2+1}$

b) $y = \ln(x^2 + x)$

c) $y = Ae^{ax}x^p$ (A,a og p er konstanter)

Oppgave 3

En vinprodusent produserer en bestemt vin hvis verdi øker ved lagring. Man regner med en prisutvikling pr. flaske :

$P(t) = 200 - 150e^{-0,5t}$

hvor t betyr tiden (i år) fra vinen blir tappet.

a) Hva er prisen etter 3 år?

Ved lagring og ettersyn oppstår brekkasje og svinn som tilsvarer 3% av kvantum til enhver tid. D.v.s. Hvis produksjonen er N flasker vil tilgjengelig salgskvantum til enhver tid være

$K(t) = Ne^{-0,03t}$

Brutto salgsinntekt vil altså bli $I(t) = P(t)K(t)$

b) Ved hvilket tidspunkt bør produsenten selge dersom I(t) skal bli størst?

Oppgave 4

Gitt $f(x,y) = -2x + y \qquad g(x,y) = x^2 + y$

a) Tegn nivålinjene til $f(x,y)$ som svarer til z verdiene
$z = 0,\ 2,\ 4$ og 6.

b) Maksimer $f(x,y)$ når $g(x,y) = 4$.
(Problemet har løsning.)
Finn løsningen ved å bruke Lagrangemultiplikatorer.

c) Har det tilhørende minimumsproblem noen løsning?
Begrunn svaret.

Oppgave 5

Gitt funksjonen

$$f(x,y) = (x^3 - 3x)e^{y^2}$$

a) Finn funksjonens stasjonære punkter og avgjør hva slags punkter det er.

b) Vi lar nå funksjonen være definert i området
$0 \le x \le 3 \qquad 0 \le y \le 1$
Forklar at funksjonen nå har både maksimum og minimum og finn disse.

c) Punktet $(2, \frac{1}{2})$ ligger på nivålinjen $(x^3 - 3x)e^{y^2} = 2e^{\frac{1}{4}}$

Bestem tangentens stigningstall i dette punktet.

Oppgave 6

Oppgave 7

a) Forklar at ligningssystemet

$$
\begin{aligned}
a^2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\
-2x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\
2x_2 + 3x_3 &= -1
\end{aligned}
$$

Alltid (for alle verdier av a) har løsning.

b)

Gitt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Regn ut $A \cdot B$

Bestem en 3 x 3 matrise X slik at :

$B + A^{-1}X = A^{-1}$

Fasit til MET 1035 MATEMATIKK 07.12.87

1 a) $x=0$ eller $x=5$ b) $x=0$ eller $x=-3$ eller $x=-2$

c) $x=1$ d) $x=1/2$

2 a) $y' = \dfrac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$ b) $y' = \dfrac{2x+1}{x^2+x}$

c) $y' = A(ax+p)x^{p-1}e^{ax}$

3 a) 167 b) 5.168 år ≈ 5 år

4 b) Maksimumspunkt (-1,3,5) c) Nei

5 a) (-1,0) (1,0) Sadelpunkter.
b) Da f(x,y) er kontinuerlig og definisjonsområdet er lukket og begrenset vil f(x,y) ha både maksimum og minimum. Globalt minimum (1,1,-2e) Globalt maksimum (3,1,18e)
c) Tangentens stigningstall $a = -9/2$

6

7 a) Determinanten til ligningssystemet, $|A| = 5a^2+2 \neq 0$ for alle a

b) $X = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$

BEDRIFTSØKONOMISK INSTITUTT
BEKKESTUA

LF

Eksamen i

MET 1035 MATEMATIKK
SIVILØKONOMSTUDIET

30.05.88 0900 - 1400

Tillatte hjelpemidler:
Alle skriftlige hjelpemidler.
Kalkulator.
Oppgaven er på 3 sider
Innføringsark - Ruteark

Oppgave 1

Løs følgende ligninger

a) $x^2 + 4x = 21$

b) $\sqrt{2x^2 - 1} - 2 = x$

c) $2x + |2x-4| = 4$

d) $\frac{6}{x-1} + \frac{6}{x-2} = \frac{5}{x-3}$

Oppgave 2

Et amerikansk firma som satte i gang en storstilet reklamekampanje regnet med en positiv respons fra et antall personer gitt ved modellen $N = 1\ 000\ 000(1-e^{-0,2t})$, t er antall dager etter kampanjestart.

a) Hvor mange kunder hadde man etter 3 dager?

b) Hvor lang tid tok det før antallet var 632 000?
Gjennomsnittsinntekten fra hver kunde ble satt til 5 \$.
Utgiftene til kampanjen var 5000 \$ i faste utgifter og 10 000 \$ pr. dag.

c) Vis at fortjenestefunksjonen kan skrives

$$P(t) = 5\ 000\ 000(1-e^{-0,2t}) - 10\ 000t - 5000.$$

Vi ønsker å maksimere fortjensten. Når inntreffer maksimum?

Oppgave 3

Gitt funksjonen $f(x,y) = 10 - \sqrt{4-(x^2+y^2)}$

a) Skraver funksjonens definisjonsområde i x-y planet.

b) Forklar hvorfor f(x,y) har globalt maksimum og minimum og finn disse ved regning.

c) Forklar hvordan du bare ved å se på funksjonsuttrykket kan finne punktene i b)

Oppgave 4

Se på problemet:

Maksimer/minimer $f(x,y) = x^2 + y^2$ når $x+y = 1$.

a) Det finnes ett punkt som tilfredstiller Lagrange-betingelsene. Hvilket?

b) Avgjør ved geometrisk betraktning om punktet er maksimum eller minimum.

Oppgave 5

d) Beregn de ubestemte integralene

$$\int \frac{2x-7}{x^2-7x+12}\,dx$$

$$\int \frac{1}{x^2-7x+12}\,dx$$

e) Undersøk om følgende integraler eksisterer, og finn i såfall deres verdi.

$$\lim_{a \to \infty} \int_5^a \frac{2x-7}{x^2-7x+12}\,dx$$

$$\lim_{a \to \infty} \int_5^a \frac{1}{x^2-7x+12}\,dx$$

Oppgave 6

Gitt matrisene $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

a) Regn ut følgende matriser

1) A-B 2) A+B 3) (A-B)(A+B) 4) AA 5) BB

6) AA-BB

b) Fra algebraen kjenner vi " 3. kvadratsetning "

$(a-b)(a+b) = a^2-b^2$

Forklar hvorfor $(A-B)(A+B) \neq AA-BB$ når det gjelder matriser.

SENSORVEILEDNING

MET 1035 MATEMATIKK
SIVILØKONOMSTUDIET

30.05.88

Oppgave 1

a) $x^2 + 4x = 21 \iff x^2 + 4x - 21 = 0 \iff x = -7$ eller $x = 3$

b) $\sqrt{2x^2 - 1} - 2 = x \iff \sqrt{2x^2 - 1} = x + 2 \implies 2x^2 - 1 = (x+2)^2$

$\iff 2x^2 - 1 = x^2 + 4x + 4 \iff x^2 - 4x - 5 = 0 \iff$
$x = -1$ eller $x = 5$. Setter vi prøve ser vi at begge verdiene passer i ligningen.

c) $2x + |2x - 4| = 4 \iff |2x-4| = 4 - 2x \iff$
$|2x-4| = -(2x-4)$. Vi ser her at x er en løsning hvis og bare hvis $2x-4 \leq 0$. Dette er ekvivalent med at $x \leq 2$.

d) $$\frac{6}{x-1} + \frac{6}{x-2} = \frac{5}{x-3} \iff \frac{6x-12 + 6x - 6}{(x-1)(x-2)} = \frac{5}{x-3} \implies$$

$(12x-18)(x-3) = 5(x-1)(x-2) \iff$
$12x^2 - 54x + 54 = 5x^2 - 15x + 10 \iff 7x^2 - 39x + 44 = 0 \iff$
$x = \frac{11}{7}$ eller $x = 4$. Setter vi prøve ser vi at begge verdiene passer i ligningen.

Oppgave 2

$N = 1\,000\,000(1-e^{-0.2t})$

a) $N(3) = 1\,000\,000(1-e^{-0.2 \cdot 3}) = 451\,188$

b) $1\,000\,000(1-e^{-0.2t}) = 632\,000 \iff$

$1-e^{-0.2t} = 0.632 \iff e^{-0.2t} = 0.368 \iff$

$-0.2t = \ln(0.368) \iff t = -5\ln(0.368) = 5$

c) $P(t) = 5N(t) - 5000 - 10000t =$

$5\,000\,000(1-e^{-0.2t}) - 10\,000t - 5000$

$P'(t) = 5\,000\,000(-e^{-0.2t})(-0.2) - 10\,000 \iff$

$1\,000\,000e^{-0.2t} = 10\,000 \iff e^{-0.2t} = \frac{1}{100} \iff$

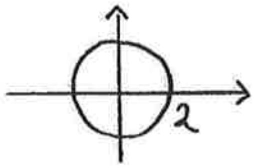
$-0.2t = \ln(\frac{1}{100}) = -\ln(100) \quad \Leftrightarrow \quad t = 5\ln(100) = 23$ dager.

$P''(t) = 1\,000\,000e^{-0.2t}(-0.2) = -200\,000e^{-0.2t} < 0$ for alle t. Dette viser at P(t) er en konkav funksjon.

t = 23 dager er derfor et maksimumspunkt.

Oppgave 3

$f(x,y) = 10 - \sqrt{4-(x^2+y^2)}$



a) $4 - (x^2 + y^2) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 \leq 4$

b) Funksjonen f(x,y) har både maksimum og minimum da den er kontinuerlig og definisjonsområdet er lukket og begrenset.

$$f'_x = -\frac{1}{2\sqrt{4-(x^2+y^2)}}(-2x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0$$

$$f'_y = -\frac{1}{2\sqrt{4-(x^2+y^2)}}(-2y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y=0$$

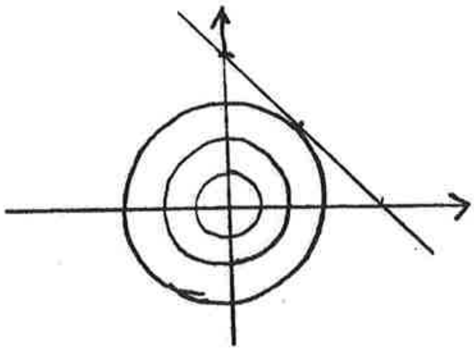
På randa $x^2 + y^2 = 4$ er $f(x,y) = 10 - \sqrt{4-4} = 10$
Dette er maksimunspunkter.
$f(0,0) = 10 - \sqrt{4} = 8$
Dette er et minimumspunkt.

c) Ser vi på funksjonsuttrykket ser vi at dette vil ha et minimum dersom $4 - (x^2 + y^2)$ er størst mulig, dvs $x^2 + y^2 = 0$
Dette oppnår vi dersom dersom $x = 0$ og $y = 0$.
Skal funksjonen ha et maksimum må $4 - (x^2 + y^2)$ være minst mulig og ikke-negativ. Dette vil være tilfelle når $x^2 + y^2 = 4$

Oppgave 4

a) $F(x,y) = f(x,y) + g(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda g(x+y-1)$
$F'_x = 2x + \lambda = 0$
$F'_y = 2y + \lambda = 0$ Dette medfører at y=x
Settes dette inn i bibetingelsen får vi $2x=1 \Leftrightarrow y=x= \frac{1}{2}$

b)



Nivålinjer til $x^2 + y^2 = z$

Jo større radius, høyre z verdi, d.v.s $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ er et

minimumspunkt

Oppgave 5

d) $$\int \frac{2x-7}{x^2-7x+12}\,dx = \ln|x^2 -7x+12| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2-7x+12}\,dx = \int \frac{1}{(x-3)(x-4)}\,dx = \int \frac{-1}{(x-3)}dx + \int \frac{1}{(x-4)}dx$$

$$= -\ln|x-3| + \ln|x-4| + C = \ln \left|\frac{x-4}{x-3}\right| + C$$

e) $$\int_5^\infty \frac{2x-7}{x^2-7x+12}\,dx = \Big|_5^\infty \ln|x^2-7x+12| = \infty$$

Integralet eksisterer ikke.

$$\int_5^\infty \frac{1}{x^2-7x+12}\,dx = \Big|_5^\infty \ln\left(\frac{x-4}{x-3}\right) = \ln(1) - \ln(1/2) = \ln(2)$$

Oppgave 6

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) 1) $A-B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 2) $AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

3) $(A-B)(A+B) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 4) $AA = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

5) $BB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ 6) $AA-BB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$(A-B)(A+B) = A^2 - BA + AB - B^2 \neq A^2 - B^2$ da $AB \neq BA$

BEDRIFTSØKONOMISK INSTITUTT
BEKKESTUA

LF

Eksamen i

MET 1035 MATEMATIKK
SIVILØKONOMSTUDIET

08.12.88 0900 - 1400

Tillatte hjelpemidler:
Alle skriftlige hjelpemidler.
Kalkulator.
Oppgaven er på 3 sider
Innføringsark - Ruteark

Oppgave 1
Et land har et oljefelt som det ønsker å utnytte. De vil starte produksjonen i dag, $t = 0$, og har valgt mellom to utvinningsprofiler f og g som angir produksjonen av olje pr tidsenhet. Levetiden til feltet vil for begge utvinningsprofiler være 10 år.

$f(t) = 10t^2 - t^3 \qquad 0 \le t \le 10$

$g(t) = t^3 - 20t^2 + 100t \qquad 0 \le t \le 10$

a) Vis at $f(t) \ge 0$ og $g(t) \ge 0$ når $0 \le t \le 10$?

b) Skisser de to utvinningsprofilene i samme koordinatsystem. La $0 \le t \le 10$

c) Den totale produksjon fra et oljefelt som starter produksjonen i dag og som har en levetid på T år er

$$\int_0^T h(t)dt$$ Her er $h(t)$ produksjonen pr tidsenhet.

Finn den totale produksjonen ved henholdsvis utvinningsprofil f og g.

d) Landet får en pris pr. enhet for oljen som er gitt ved $p(t) = 25 - t$ (t antall år)
De totale oljeinntektene vil da være gitt ved

$$I = \int_0^T p(t)h(t)dt$$

Finn inntekten ved først å benytte utvinningsprofil f, deretter g.

Hvilken av disse to bør landet velge?

Kan du også begrunne valget ut fra svarene på spørsmål b).

Oppgave 2

En monopolist produserer to varer. Profitten π er gitt ved $\pi = px + qy - C$, der x og y er etterspørselen etter de to varene, p og q er enhetsprisene og C er kostnadene.

Anta at sammnhengen mellom pris og etterspørsel for de to varene er gitt ved: $p = 25 - x - 0{,}2y$ $\quad q = 50 - 0{,}4x - 2y$
Anta dessuten at de totale kostnadene er gitt ved
$C(x,y) = 150 + 9x + 7y$

(I denne oppgaven går vi ut i fra at funksjonen som skal maksimeres har maksimum.)

a) Hva blir profitten π som funksjon av x og y?

b) For hvilke verdier av x og y blir profitten maksimal, og hvor stor blir den?

c) Hvilke priser bør monopolisten ta?

Oppgave 3

a) Deriver følgende funksjoner, og finn når den deriverte er null.

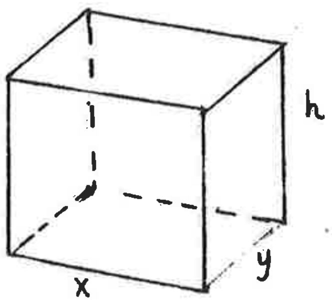
i) $f(x) = x^5 - 80x$ $\qquad$ ii) $g(x) = \dfrac{\ln x - x}{\ln x + x}$

b) En kurve i xy-planet er gitt ved ligningen

$$2x^2 + 4xy + 3y^2 - 9 = 0$$

Finn ligningen for tangenten i punktet (1,1)

Oppgave 4



Vi skal lage en firkantet eske <u>uten lokk.</u> Grunnflatens sider er x og y. Høyden er h.

Volumet skal være 1 dm^3

a) Vis at $h = \dfrac{1}{xy}$

b) Esken skal lages av to forskjellige metaller. Materialet i bunnen koster kr 100 pr dm^2 og materialet i sideflatene koster kr 400 pr dm^2.
Finn x, y, og h dersom esken skal koste så lite som mulig.
Hva blir prisen?

Oppgave 5
Løs ligningene:

a) $\ln x + \ln \frac{x}{2} + \ln \frac{x}{4} = 0$

b) $e^{4x^2 - x} = \sqrt{e}$

c) $e^{3x} - e^{2x} - 2e^{x} = 0$

Oppgave 6
Gitt ligningssettet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= b_1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= b_2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= b_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= b_4 \end{aligned} \qquad *)$$

a) Vi ønsker å skrive ligningssettet på matriseformen
$A_1 X_1 = B_1$ Hvordan ser matrisene A_1, X_1 og B_1 ut?

b) Vi kan også skrive ligningssettet slik
$X_2 A_2 = B_2$ Hvordan ser matrisene X_2, A_2 og B_2 ut?

c) Vis at $A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Bruk A_1^{-1} til å løse *) når $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

Sensorveiledning Met 1035 gitt 08.12.88

Oppgave 1

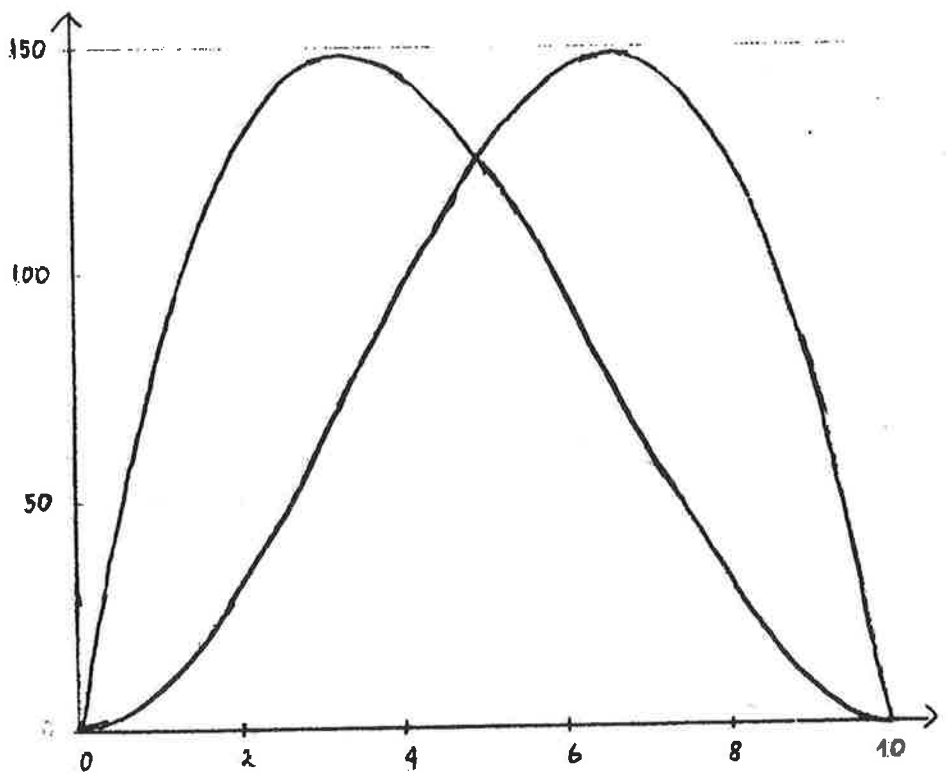
a) $f(t) = 10t^2 - t^3 = t^2(10 - t) \geq 0$ når $0 \leq t \leq 10$

$g(t) = t^3 - 20t^2 + 100t = t(t^2 - 20t + 100) = t(t-10)^2 \geq 0$
når $0 \leq t \leq 10$

b) $f(t) = 10t^2 - t^3$ $f'(t) = 20t - 3t^2 = t(20 - 3t)$
$f'(t) \geq 0$ når $0 \leq t \leq 20/3$
$f'(t) \leq 0$ når $20/3 \leq t \leq 10$
$t = 20/3$ er et globalt maksimumspunkt $f(20/3) = 148.15$
$f''(t) = 20 - 6t$, $t = 10/3$ er et vendepunkt.
$f(10/3) = 74.07$

$g(t) = t^3 - 20t^2 + 100t$

$g'(t) = 3t^2 - 40t + 100 = 3(t-10/3)(t-10)$
Her er $t = 10/3$ og $t = 10$ løsninger av $g'(t) = 0$
$g(t) \geq 0$ når $0 \leq t \leq 10/3$
$g(t) \leq 0$ når $10/3 \leq t \leq 10$
$t = 10/3$ er et globalt maksimumspunkt
$g(10/3) = 148.15$
$g''(t) = 6t - 40$, $t = 20/3$ er et vendepunkt
$g(20/3) = 74.07$



c) Total produksjon ved profil f

$$\int_0^{10}(10t^2 - t^3)dt = \Big|_0^{10} (10/3)t^3 - (1/4)t^4) = (10000/12) = 833.33$$

Total produksjon profil g

$$\int_0^{10}(t^3 - 20t^2 + 100t)dt = \Big|_0^{10}((1/4)t^4 - (20/3)t^3 + (100/2)t^2) =$$

833.33

d) Totale inntekter ved produksjonsprofil f blir

$$\int_0^{10}(25-t)(10t^2 - t^3)dt = \int_0^{10}(t^4 - 35t^3 + 250t^2)dt =$$

$$\Big|_0^{10} ((1/5)t^5 - (35/4)t^4 + (250/3)t^3 = 15833.33$$

Totale inntekter ved produksjonsprofil g blir

$$\int_0^{10}(25 - t)(t^3 - 20t^2 + 100t)dt = \int_0^{10}(-t^4 + 45t^3 - 600t^2 + 2500t)dt =$$

$$\Big|_0^{10}[-(1/5)t^5 + (45/4)t^4 - (600/3)t^3 + (2500/2)t^2] = 17500.00$$

Landet bør velge utvinningsprofil g da dette gir den største totalinntekten.
Dette kan vi også se ut i fra grafene som vi skisserte i spørsmål b). Utvinningsprofil g vil gi en større produksjon tidligere i utvinningsfasen enn f. Dette vil være gunstig da prisen er fallende.

Oppgave 2

a) $\pi(x,y) = px + qy - C =$
$(25 - x - 0.2y)x + (50 - 0.4x - 2y)y - (150 + 9x + 7y) =$

$-x^2 - 2y^2 - 0.6xy + 16x + 43y - 150$

b) I $\quad \pi'_x = -2x - 0.6y + 16 = 0$

II $\quad \pi'_y = -0.6x - 4y + 43 = 0$

$3 \cdot I \qquad -6x - 1.8y + 48 = 0$

$10 \cdot II \qquad -6x - 40y + 430 = 0$

$3 \cdot I - 10 \cdot II \qquad 38.2y = 382 \qquad y = 382/38.2 = 10$

Settes $y = 10$ inn i I får vi $-2x - 6 + 16 = 0$
Herav følger $x = 5$

$\pi(5,10) = 105$

Oppgave 3

a) i) $f(x) = x^5 - 80x \qquad f'(x) = 5x^4 - 80 = 0$

$x^4 = 16 \qquad x = 2$

ii) $g(x) = \dfrac{\ln x - x}{\ln x + x}$

$$g'(x) = \frac{(1/x - 1)(\ln x + x) - (\ln x - x)(1/x + 1)}{(\ln x + x)^2} =$$

$$\frac{2(1 - \ln x)}{(\ln x + x)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = e$$

b) $F(x,y) = 2x^2 + 4xy + 3y^2 - 9 = 0$

Ligningen til tangenten er på formen $y = ax + b$ der

$$a = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{4x + 4y}{4x + 6y} = -\frac{4 + 4}{4 + 6} = -\frac{4}{5}$$

$y = -(4/5)x + b \qquad y(1) = -(4/5) \cdot 1 + b = 1 \qquad b = 9/5$

$y = -(4/5)x + 9/5$

Oppgave 4

a) $xyh = 1 \quad \Rightarrow \quad h = 1/xy$

b) Prisen er en funksjon av x og y.
$f(x,y) = 2xh \cdot 400 + 2yh \cdot 400 + xy \cdot 100 =$
$800(1/y + 1/x) + 100xy = 100(8/x + 8/y + xy)$

$$f'_x = 100\left(\frac{-8}{x^2} + y\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{I} \qquad y = \frac{8}{x^2}$$

$$f'_y = 100\left(\frac{-8}{y^2} + x\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{II} \qquad x = \frac{8}{y^2}$$

Setter vi II inn i I får vi $\quad y = y^4/8$

$y^4 - 8y = y(y^3 - 8) = 0$ Da y ikke kan være null må $y = 2$

Herav følger $x = 2$, $\quad h = 1/xy = 1/4$

Prisen blir $f(2,2) = 1200$

Oppgave 5

a) $\ln x + \ln\frac{x}{2} + \ln\frac{x}{4} = \ln(x\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{4}) = \ln\frac{x^3}{8} = 0$

$\iff \quad x^3/8 = 1 \iff x^3 = 8 \iff x = 2$

b) $e^{4x^2 - x} = \sqrt{e} \iff e^{4x^2 - x} = e^{1/2} \iff$

$4x^2 - x - 1/2 = 0 \iff x = 1/2$ eller $x = -1/4$

c) $e^{3x} - e^{2x} - 2e^x = 0 \iff e^x(e^{2x} - e^x - 2) = 0 \iff$

$e^x = 0$ eller $(e^x)^2 - e^x - 2 = 0 \iff$

$e^x = 0$ eller $e^x = 2$ eller $e^x = -1 \iff x = \ln 2$

Oppgave 6

a) $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad B_1 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$

b)

$X_2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}$

$B_2 = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{bmatrix}$

$A_2 = A_1$ da A_1 er symetrisk

c)

La C = $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Da $A_1 C = I$ følger at $C = A_1^{-1}$ Her er I enhetsmatrisen.

$$X = A_1^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

BEDRIFTSØKONOMISK INSTITUTT
SANDVIKA

F

Eksamen i

MET 1035 MATEMATIKK KONTINUASJON
SIVILØKONOMSTUDIET

05.06.89 0900 - 1400

Tillatte hjelpemidler:
Alle skriftlige hjelpemidler.
Kalkulator.
Oppgaven er på 2 sider
Innføringsark - Ruteark

Oppgave 1

Løs følgende likninger og ulikheter

a) $\left| \frac{1}{x} + 5 \right| = 8$

b) $\frac{x}{x+2} + \frac{x+2}{x} \geq 2$

c) $\ln(x \quad + 2) + \ln(x \ ) = 0$

Oppgave 2

Gitt funksjonen

$f(x) = x^2 - 11x + 5 \cdot \ln x + 10$

a) Finn eventuelle lokale ekstrempunkter og verdier.
b) Finn tangenten til grafen i punktet (1,0)

Oppgave 3

Anta at etterspørselen etter en vare for en representativ familie er gitt ved $f(x,y) = 100x^{-1,5}\, y^{2,08}$
Her er x varens pris, y familiens inntekt.
Finn prisen $x = x(t)$ og inntekten $y = y(t)$ som funksjon av tiden når vi antar at både prisen på varen og familiens inntekt vokser med 10% pr år. Anta for enkelthets skyld at både pris og inntekt i $t = 0$ er 1. Det vil si $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.
Hvor lang tid tar det før etterspørselen er fordoblet?

Oppgave 4

En bedrift har et overskudd gitt ved

$f(x,y) = 63y + 3xy - 2x^2 - 9y^2 - 26$

Her er x og y innsatsfaktorer. $x \geq 0$, $y \geq 0$.

a) Finn eventuelle stasjonære punkter og avgjør hva slags punkter det er.

b) Bedriften vil oppnå et maksimalt overskudd. Hvor stort blir dette?

c) Anta at bibetingelsen $x + 3y = a$ skal være oppfylt. Hvilken verdi må a ha dersom bedriften skal oppnå maksimalt overskudd for $x = 1,5$?

Oppgave 5

a)

La matrisen A $= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ Finn den inverse matrisen A^{-1}

Et firma produserer 3 produkter. Hvert produkt trenger et antall enheter av to råvarer, samt arbeidskraft.

Tabellen nedenfor viser behovet pr enhet for hvert produkt.

	produkt 1	produkt 2	produkt 3
råvare 1	1	4	4
råvare 2	3	2	3
arbeidskraft	1	3	3

Råmaterialforbruket er oppgitt i kg pr enhet.
Arbeidskraftforbruket er oppgitt i timer pr enhet.

For å produsere en enhet av produkt 1 vil det derfor gå med 1 kg av råvare 1, 3 kg av råvare 2 og 1 time arbeidskraft.

b) Hvor mye vil det gå med av råvare 1, råvare 2 og arbeidskraft dersom bedriften ønsker å produsere henholdsvis 2, 3 og 4 enheter av produkt en, to og tre.
Vis at dette forbruket kan beregnes ved en matrisemultiplikasjon AX, der A er matrisen ovenfor, og

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ Her er x_1, x_2 og x_3 henholdsvis produksjonen av produkt en to og tre.

c) Hvor mange enheter må bedriften produsere av de tre produktene for at det skal gå med 21 kg av råvare 1, 16 kg av råvare 2, og 16 arbeidstimer?

Oppgave 6
Bestem verdiene av følgende integraler:

a) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$

b) $\int_{-\infty}^0 (x-1)^2 e^x \, dx$

Fasit til MET 1035 MATEMATIKK 05.06.89

1 a) $x = -1/13$ eller $x = 1/3$
  b) $x < -2$ eller $x > 0$
  c) $x = \sqrt{2} - 1$

2 a) $x = 1/2$ lokalt maksimum,
  $f(1/2) = 19/4 - 5\ln 2 \approx 1.2843$
  $x = 5$ er et lokalt minimum, $f(5)=5\ln 5 - 20\approx-11.95$.
  b) $y=-4x+4$

3 $x=1.1^t$ $y=1.1^t$ $t = 12.54$

4 a) (3,4) lokalt maksimum.
  b) $f(3,4) = 100$.
  c) $a = 11$.

5 a) $$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 \\ -6 & -1 & 9 \\ 7 & 1 & -10 \end{bmatrix}$$

  b) Forbruket av råvare 1,2 og 3 er hhv 30, 24 og 23.
  c) $x_1=1$, $x_2=2$ $x_3=3$

6 a) 1 b) 5

BEDRIFTSØKONOMISK INSTITUTT
SANDVIKA

LF

Eksamen i

MET 1035 MATEMATIKK
SIVILØKONOMSTUDIET

29.11.89 0900 - 1400

Tillatte hjelpemidler:
Alle skriftlige hjelpemidler.
Kalkulator.
Oppgaven er på 3 sider
Innføringsark - Ruteark

Oppgave 1

Løs følgende ligninger og ulikheter

a) $|3x + 2| = 7$

b) $\sqrt{x+2} = 2x-2$

c) Vis at $x = 2$ er en løsning av ligningen

$$\sqrt{\frac{30 - 11x}{4 - x}} = x$$

Finn deretter alle løsninger av ligningen

Oppgave 2

Anta at skatten for norske inntektstakere med årsinntekt innenfor et visst intervall kan beskrives ved

$T = a(bw + c)^p + kw$ der T er skatten, w er bruttoinntekten, og a,b,c,p,k er positive konstanter. $p > 1$

a) Finn et uttrykk for marginalskatten $\frac{dT}{dw}$

b) Vis at marginalskatten er stigende med stigende verdier av w.

Oppgave 3

a) En bakteriekultur øker med ca 20% pr. døgn. Dvs.

$N(t) = N_0 e^{0,2t}$ dersom N_0 er antallet ved $t = 0$.

t er tiden i døgn.

Dersom N_0 er 100.000, når vil $N(t)$ være 1 million?

Forskeren har funnet en gift som reduserer antallet med faktoren $e^{-0,01t^2}$. Vis at dersom giften tilsettes ved tidspunktet $t = 0$ vil antallet utvikles etter formelen

$$N_1(t) = N_0 e^{0,2t - 0,01t^2}$$

b) Hvor lang tid vil det ta før bakterieantallet begynner å synke? Hvor stort er antallet da?

c) Når er antallet tilbake på nivået 100.000?

d) Skisser kurven for $N_1(t)$

(Det er ikke nødvendig å beregne $N_1''(t)$)

e) Dersom giftkonsentrasjonen økes, vil den reduserende faktor være e^{-at^2}. Det maksimale antall bakterier blir nå N_{maks} = 200.000. Finn verdien av a og tidspunktet når dette inntreffer.

Oppgave 4

En bedrift har funnet at fortjenesten ved salg av to produkter x og y er gitt ved $\pi(x,y) = 100(\sqrt{x} + \sqrt{y}) - 1000$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

a) Hvor stor er y når fortjenesten er 2000 og x er 100 enheter?

b) På grunn av begrensninger ved produksjonen må x + 5y ikke overstige 3000.
Maksimer $\pi(x,y)$ når $x + 5y = 3000$. Bruk Lagrange.
Forklar at du virkelig får maksimum.

Oppgave 5

Tre bedrifter produserer tre ulike merker A, B og C av en vare. Overgangen fra ett merke til et annet er gitt ved følgende tabell:

	A	B	C
A	0,8	0,1	0,1
B	0,2	0,7	0,1
C	0,0	0,2	0,8

Første linje i tabellen tolkes slik:
Av de som kjøper merke A i en uke vil 80% kjøpe merke A også i neste uke, av de som kjøper merke B vil 10% gå over til å kjøpe merke A og av de som kjøper merke C vil 10% gå over til å kjøpe merke A.
Den andre linjen i tabellen tolkes slik:
Av de som kjøper merke A i en uke vil 20% gå over til å kjøpe merke B i neste uke, av de som kjøper merke B vil 70% fortsatt kjøpe merke B og av de som kjøper merke C vil 10% gå over til å kjøpe merke B.

Den tredje linjen i tabellen tolkes på tilsvarende måte.

La nå D være matrisen $\begin{bmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,0 & 0,2 & 0,8 \end{bmatrix}$

Den inverse matrisen til D vil være

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{27}{21} & \frac{-3}{21} & \frac{-3}{21} \\ \frac{-8}{21} & \frac{32}{21} & \frac{-3}{21} \\ \frac{2}{21} & \frac{-8}{21} & \frac{27}{21} \end{bmatrix}$$

I uke 40 var markedsandelene til de tre merkene A, B, og C hhv. 20%, 30%, og 50%.

$$\text{La} \quad X = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,3 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

a) Forklar hvorfor markedsandelene til de tre merkene i uke 41 er gitt ved matriseproduktet

$$DX = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,0 & 0,2 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,3 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

b) Beregn markedsandelene til de tre merkene i uke 41

c) Hva er markedsandelene til de tre merkene i hhv. uke 39 og uke 42?

Oppgave 6

Beregn følgende integraler

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 -13x+42}\,dx$

b) $\displaystyle\int_8^{\infty} \frac{1}{x^2 -13x+42}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^3}\,dx$

Met 1035 Sensorveiledning 29.11.89

Oppgave 1

a) $|3x+2| = 7 \iff 3x+2 = -7$ eller $3x+2 = 7 \iff$
$x=-3$ eller $x=5/3$

b) $\sqrt{x+2} = 2x-2 \implies x+2 = 4x^2-8x+4 \iff x=1/4$ eller $x=2$
Setter vi prøve ser vi at kun $x=2$ passer.

c) $\sqrt{\dfrac{30-11x}{4-x}} = x$. Setter vi inn $x = 2$ blir
venstre og høgre siden like store.
Kvadrerer vi ligningen på begge sider får vi

$\dfrac{30-11x}{4-x} = x^2$ som gir $x^3-4x^2-11x+30 = 0$

Her vet vi at $x = 2$ er en løsning.

$(x^3-4x^2-11x+30):(x-2) = x^2-2x-15$

$x^2-2x-15 = 0 \iff x=-3$ eller $x=5$.
Setter vi prøve ser vi at kun $x=2$ og $x=5$ passer.

Oppgave 2

$T = a(bw+c)^p + kw$

a) $\dfrac{dT}{dw} = ap(bw+c)^{p-1}\, b + k = abp(bw+c)^{p-1} + k$

b) $\dfrac{d^2T}{dw^2} = abp(p-1)(bw+c)^{p-2}\, b > 0$ da $p > 1$

Oppgave 3

a) $N(t) = 100000e^{0.2t} = 1000000 \iff e^{0.2t} = 10 \iff$
$0.2t = \ln(10) \iff t = 5\ln(10) = 11.51$
Antallet vil utvikles etter formelen

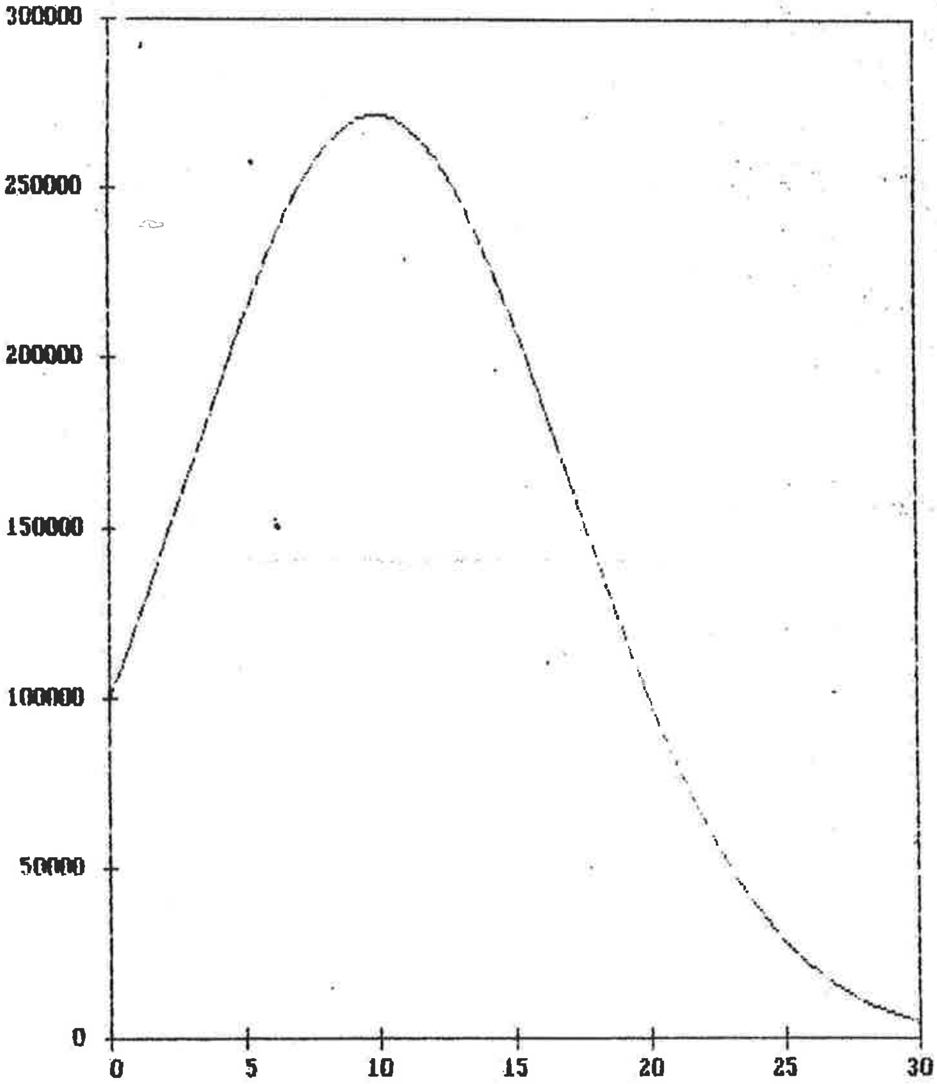
$$N(t) = e^{-0.01t^2} \cdot N_0e^{0.2t} = N_0e^{0.2t-0.01t^2} =$$

$$100000\ e^{0.2t-0.01t^2}$$

b) $N'(t) = 100000e^{0.2t-0.01t^2}(0.2-0.02t)$ Drøfter vi
fortegnet for $N'(t)$ på tallinjen ser vi at
$N'(t) > 0$ for $t < 10$, $N'(10) = 0$, $N'(t) < 0$ for $t>10$.
Bakterieantallet vil begynne å synke etter 10 døgn.
$N(10) = 100000e \approx 271828$.

c) $N(t) = 100000 \iff e^{0.2t-0.01t^2} = 1 \iff$

$0.2t-0.01t^2 = 0 \iff t = 0$ eller $t = 20$.
Etter 20 døgn er antall bakterier 100000 igjen.



e) Bakterieantallet vil nå vokse etter funksjonen

$N(t)=100000e^{0.2t-at^2}$

$N'(t) = 100000e^{0.2t-at^2}(0.2-2at)$

Drøfting av fortegnet gir at bakterieantallet er maksimalt når $t = 0.1/a$. $N(0.1/a) = 100000e^{0.01/a}$

Skal dette maksimale antallet være 200000 må

$e^{0.01/a} = 2 \iff 0.01/a = \ln 2 \iff a=0.01/\ln 2 \approx 0.0144$

$t = 0.1/a = 10\ln 2 \approx 6.93$

Oppgave 4

a) $\pi(x,y) = 100(\sqrt{x}+\sqrt{y})-1000$

$\pi(100,y) = 100(\sqrt{100} + \sqrt{y}) -1000 = 2000$

$\sqrt{y} = 20 \qquad y = 400$

b) $F(x,y) = \pi(x,y) - \lambda(g(x,y)-C) =$

$100(\sqrt{x}+\sqrt{y})-1000 - \lambda(x+5y-3000)$

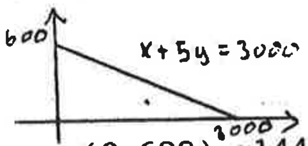
$F'_x = \dfrac{100}{2\sqrt{x}} - \lambda = 0 \qquad F'_y = \dfrac{100}{2\sqrt{y}} -5\lambda = 0$

Dette gir $5\sqrt{y} = \sqrt{x} \qquad x = 25y$

Settes dette inn i bibetingelsen $x+5y=3000$ får vi

$30y=3000 \qquad y=100 \qquad x=2500$

Fortjenesten blir $\pi(2500,100)= 5000$



Da $\pi(0,600) \approx 1449$ og $\pi(3000,0) \approx 4477$ ser vi at bedriften får maksimal fortjeneste når $x=2500$ og $y = 100$.
Den maksimale fortjenesten blir 6000.

Oppgave 5

a) Dersom N er antall personer som kjøper et av merkene i uke 40, vil antall personer som kjøper hhv merke A, B og C i uke 40 være $0.2 \cdot N$, $0.3 \cdot N$ og $0.5 \cdot N$

$0.8 \cdot 0.2 \cdot N$ vil fortsatt kjøpe merke A

$0.1 \cdot 0.3 \cdot N$ vil gå over fra merke B til merke A

$0.1 \cdot 0.5 \cdot N$ vil gå over fra merke C til merke A

Totalt vil derfor $(0.8 \cdot 0.2+0.1 \cdot 0.3+0.1 \cdot 0.5) \cdot N$ bruke merke A i uke 41.

Merke A har derfor en markedsandel i uke 41 lik

$0.8 \cdot 0.2+0.1 \cdot 0.3+0.1 \cdot 0.5$

Dette er første linje i matriseproduktet DX.

Tilsvarende vil andre og tredje linje gi markedsandelene for merke B og C

b)
$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.0 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.24 \\ 0.30 \\ 0.46 \end{bmatrix}$$

c) Markedsandelen i uke 39 vil være $D^{-1}X$ =

$$(1/21)\begin{bmatrix} 27 & -3 & -3 \\ -8 & 32 & -3 \\ 2 & -8 & 27 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/42 \\ 13/42 \\ 23/42 \end{bmatrix}$$

Markedsandelen i uke 42 vil være

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.0 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.24 \\ 0.30 \\ 0.46 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.268 \\ 0.304 \\ 0.428 \end{bmatrix}$$

Oppgave 6

a) $x^2-13x+42 = 0 \iff x=6$ eller $x=7$

$$\frac{1}{x^2-13x+42} = \frac{1}{(x-6)(x-7)} = \frac{A}{x-6} + \frac{B}{x-7}$$

Dette gir $1 = A(x-7) + B(x-6)$ $A=-1$ $B=1$

$$\int \frac{1}{x^2-13x+42}\,dx = \int\left(\frac{1}{x-7} - \frac{1}{x-6}\right)dx = \ln|x-7|-\ln|x-6| + C =$$

$$\ln\left|\frac{x-7}{x-6}\right| + C$$

b) $$\int_8^{\infty} \frac{1}{x^2-13x+42}\,dx = \Big|_8^{\infty} \ln\left|\frac{x-7}{x-6}\right| = \ln 1 - \ln(1/2) = \ln 2$$

c) $$\int \frac{x}{(x+1)^3}\,dx \qquad u = x+1 \quad du=dx \quad x=u-1$$

$$\int \frac{x}{(x+1)^3}\,dx = \int \frac{u-1}{u^3}du = \int (u^{-2} - u^{-3})du = \frac{u^{-1}}{-1} - \frac{u^{-2}}{-2} + C$$

$$= \frac{-1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} + C = -\frac{2x+1}{2(x+1)^2} + C$$

HANDELSHØYSKOLEN BI
SANDVIKA

LF

Eksamen i

MET 1035 MATEMATIKK
SIVILØKONÓMSTUDIET
KONTINUASJON
07.06.90 0900 - 1400

Tillatte hjelpemidler:
Alle skriftlige hjelpemidler.
Kalkulator.
Oppgaven er på 2 sider
Innføringsark - Ruteark

Oppgave 1

Gitt funksjonen $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$

a) Forklar hvorfor funksjonen er definert for alle tallpar (x,y).

b) Vis ved å bruke 1. og 2. ordens deriverte at det eneste stasjonære punktet er et lokalt minimum.

c) Vis ved å se på funksjonsuttrykket at punktet er et globalt minimum.

d) Hva slags kurver blir nivålinjene?

e) En nivålinje går gjenneom punktet $(-1,1)$. Finn ligningen for tangenten til nivålinjen i dette punktet.

f) Vi lar nå definisjonsområdet være $y \leq 4 - x^2$ og $y \geq 0$
Skraver definisjonsområdet.

g) Finn funksjonens globale maksimum når D_f er gitt som i f)

Oppgave 2

Gitt $f(x) = ae^x + \frac{1}{a} e^{-x}$ og $g(x) = ae^x - \frac{1}{a} e^{-x}$

I hele oppgaven er a en positiv konstant.

a) Vis ved regning at bare en av funksjonene har nullpunkt.

b) Vis ved regning at bare en av funksjonene har ekstremalpunkt.
Hva slags punkt er dette?

c) Hvilken verdi må a ha dersom punktet i b) skal være $x = 1$?

d) Hvilken verdi må a ha dersom $\int_0^{\ln 2} g(x)dx = \frac{7}{4}$?

Oppgave 3

Kostnadsfunksjonen for en bedrift er gitt ved

$$b(x) = \frac{2x^2 + 6x}{x+1} + 10$$

Her er x antall produserte enheter.

a) Finn $b'(x)$

Beregn $b'(1)$, $b'(5)$, $b'(10)$

Hva blir $\lim_{x\to\infty} b'(x)$

b) Vis at $b(x)$ er voksende i $[0,\infty\rangle$
Det kan vises at $b(x)$ er konkav i $[0,\infty\rangle$, hva kan du ut i fra dette si om grensekostnaden $b'(x)$?

c) Anta at bedriften oppnår en pris pr enhet gitt ved

$$p(x) = \frac{x+30}{x+1} \qquad x \in [0,\infty\rangle$$

Skisser $p(x)$

Vis at overskuddet blir $\pi(x) = \dfrac{-x^2 + 24x}{x+1} - 10$

Hvor mye bør bedriften produsere for å maksimere overskuddet, og hvor stort blir det?

Oppgave 4

Beregn følgende integraler:

a) $\displaystyle\int_5^6 \frac{3x+2}{(x-4)(x-2)}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^7 \frac{x}{\sqrt{49-x^2}}\,dx$

c) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\ln x\,dx$

Oppgave 5

Gitt matrisene $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Finn matrisene

$A^2 = AA$, $B^2 = BB$, AB , BA , $ABBA$

Benytt dette til å finne A^{-1} , B^{-1} , $(AB)^{-1}$

Sensorveiledning Met 1035 gitt 07.06.90

Oppgave 1

a) $x^2 + y^2 + 1 \geq 1$ for alle (x,y)

b) $f'_x = \dfrac{2x}{x^2 + y^2 + 1}$ $\qquad f'_y = \dfrac{2y}{x^2 + y^2 + 1}$ Stasjonært punk (0,0)

$f''_{xx} = \dfrac{2y^2 - 2x^2 + 2}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$ $\qquad f''_{xy} = \dfrac{-4xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$

$f''_{yy} = \dfrac{2x^2 - 2y^2 + 2}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$

$AC - B^2 = 4$ og $A = 2 > 0 \Rightarrow (0,0)$ er et lokalt minimum.

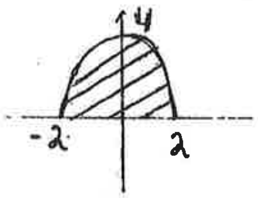
c) Da $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + 1) \geq f(0,0) = \ln 1 = 0$ for alle (x,y) er $(0,0)$ et globalt minimumspunkt.

d) Nivålinjer $\ln(x^2 + y^2 + 1) = C > 0$

$x^2 + y^2 = e^C - 1$ Vi får konsentriske sirkler med sentrum i (0,0) og radius $R = \sqrt{e^C - 1}$

e) $y' = -\dfrac{f'_x}{f'_y} = -\dfrac{x}{y} = -\dfrac{-1}{1} = 1.$ $\qquad y-1 = 1\cdot(x+1)$ $\qquad y = x+2$

f) $y \leq 4 - x^2$ og $y \geq 0$



g) Langs x-aksen, $-2 \leq x \leq 2$

$h(x) = f(x,0) = \ln(x^2 + 1)$ $\qquad h'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Mulige ekstrempunkter (-2,0) (0.0) (2,0)

Randa $y = 4 - x^2$

$h(x) = f(x, 4-x^2) = \ln(x^2 + (4-x^2)^2 + 1) = \ln(x^4 - 7x^2 + 17)$

$$h'(x) = \frac{4x^3-14x}{x^4-7x^2+17} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{eller } x = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$$

Mulige ekstrempunkter $(-\sqrt{\frac{7}{2}},\frac{1}{2})$, $(0,4)$, $(\sqrt{\frac{7}{2}},\frac{1}{2})$

$f(-2,0) = f(2,0) = \ln 5 \qquad f(0,0) = 0 \qquad f(0,4) = \ln(17)$

$f(-\sqrt{\frac{7}{2}},\frac{1}{2}) = f(\sqrt{\frac{7}{2}},\frac{1}{2}) = \ln(\frac{19}{4})$

$(0,4,\ln(17))$ er et globalt maksimum.

Oppgave 2

a) $f(x) > 0$ for alle x. $\quad g(x) = 0 \Leftrightarrow ae^x = \frac{1}{a}e^{-x} \Leftrightarrow$
$ae^x = \frac{1}{ae^x} \Leftrightarrow e^{2x} = a^{-2} \Leftrightarrow 2x = -2\ln a \Leftrightarrow x = -\ln a$

b) $g'(x) = f(x) > 0$, $g(x)$ er strengt voksende og har ikke noe ekstrempunkt. $f'(x) = g(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\ln a$
Da $f''(x) = g'(x) = f(x) > 0$ er $x = -\ln a$ et globalt minimum.

c) Skal punktet i b= være $x = 1$ må $-\ln a = 1 \Leftrightarrow \ln a = -1 \Leftrightarrow$

$a = e^{-1} = \frac{1}{e}$

d) $$\int_0^{\ln 2}(ae^x - \frac{1}{a}e^{-x})dx = \Big|_0^{\ln 2}(ae^x + \frac{1}{a}e^{-x}) = 2a + \frac{1}{2a} - a - \frac{1}{a} =$$

$$a - \frac{1}{2a} = \frac{7}{4} \Leftrightarrow 4a^2-7a-2 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4} \text{ eller } a = 2$$

Da det er oppgitt i oppgaven at $a > 0$ følger at kun $a = 2$ er en løsning.

Oppgave 3

a) $$b(x) = \frac{2x^2+6x}{x+1} + 10$$

$$b'(x) = \frac{(4x+6)(x+1)-(2x^2+6x)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+4x+6}{(x+1)^2}$$

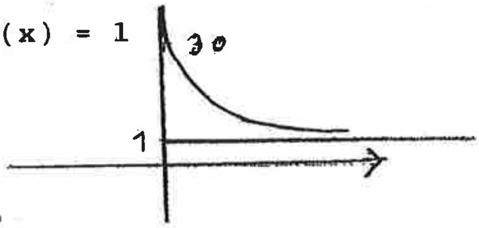
$b'(1) = 3 \qquad b'(5) = 2.111 \qquad b'(10) = 2.0331$
$\lim_{x\to\infty} b'(x) = 2$

b) Da $2x^2+4x+6 > 0$ for $x \geq 0$ så er
$b'(x) > 0$ i $[0,\infty\rangle$, $b(x)$ er voksende.
Da vi har fått oppgitt at $b(x)$ er konkav i $[0,\infty\rangle$ vil $b''(x) < 0$. Derfor vil $b'(x)$ være avtagende.

c) $p'(x) = \dfrac{x+1 \; -(x+30)}{(x+1)^2} = \dfrac{-29}{(x+1)^2} \quad < 0$

$p''(x) = 58(x+1)^{-3} \quad > 0$

$\lim_{x \to \infty} p(x) = 1$



Overskuddet $\pi(x) = p(x)x - b(x) = \dfrac{-x^2 + 24x}{x+1} - 10$

$$\pi'(x) = \frac{(-2x+24)(x+1) - (-x^2 + 24x)}{(x+1)^2} = \frac{-x^2-2x+24}{(x+1)^2}$$

$\pi'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \; -x^2-2x+24 = 0 \quad \Leftrightarrow \; x = 4$ eller $x = -6$

$$\pi'(x) = \frac{-(x-4)(x+6)}{(x+1)^2}$$

$\pi'(x) > 0$ når $0 \le x < 4$ $\quad \pi(4) = 0 \quad$ $\pi'(x) < 0$ når $x > 4$

Bedriften får maksimal fortjeneste når $x = 4$.

$\pi(4) = 6$

Oppgave 4

a) Setter vi $\dfrac{3x+2}{(x-4)(x-2)} = \dfrac{A}{x-4} + \dfrac{B}{x-2}$ får vi $A=7 \quad B=-4$

$$\int_5^6 \frac{3x+2}{(x-4)(x-2)}\,dx = \int_5^6 \left(\frac{7}{x-4} - \frac{4}{x-2}\right)dx$$

$$\Big|_5^6 (7\ln(x-4) - 4\ln(x-2)) = 7\ln 2 - 4\ln 4 - (7\ln 1 - 4\ln 3) =$$

$7\ln 2 - 8\ln 2 + 4\ln 3 = 4\ln 3 - \ln 2 = 3.7013$

b) $\displaystyle\int_0^7 \frac{x}{\sqrt{49-x^2}}\,dx \qquad u = \sqrt{49-x^2} \qquad du = \frac{1}{2\sqrt{49-x^2}}(-2x)\,dx$

$$\int_0^7 \frac{x}{\sqrt{49-x^2}}\,dx = -\Big|_0^7 \sqrt{49-x^2} = -(0-\sqrt{49}) = 7$$

c) $\int \sqrt{x}\ln x\,dx = \int x^{1/2}\ln x\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \frac{2}{3}\int x^{3/2}\frac{1}{x}\,dx =$

$\frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \frac{2}{3}\int x^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \frac{4}{9}x^{3/2} + C$

Oppgave 5

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$ABBA = AIA = AA = I$

$A^{-1} = A \qquad B^{-1} = B \qquad (AB)^{-1} = BA$

HANDELSHØYSKOLEN BI
SANDVIKA

F

Eksamen i

MET 1035 MATEMATIKK
SIVILØKONOMSTUDIET

27.11.90 0900 - 1400

Tillatte hjelpemidler:
Alle skriftlige
hjelpemidler.
Kalkulator.
Oppgaven er på 3 sider
Innføringsark - Ruteark

Oppgave 1

Gitt $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \ln y$ og $g(x,y) = x+y$

Bruk Lagrange's metode til å finne maksimum til f(x,y) når
g(x,y) = 2,5 og x og y er positive.
Begrunn at det er maksimum du har funnet.

Oppgave 2

La funksjonen f(x) være gitt ved $f(x) = 5x^{\frac{4}{5}} - x \quad x \geq 0$

a) Avgjør når f(x) er positiv, null og negativ.
b) Avgjør når f(x) vokser og avtar, og finn eventuelle ekstrempunkter og ekstremverdier.
c) Skisser grafen til f(x).

Oppgave 3
En bedrift produserer to varer, vare 1 og vare 2.
Prisen på varene er hhv p_1 og p_2

Bedriften regner med at etterspørselen etter vare 1 er gitt ved
$x = 400 - 2p_1 + p_2$
og at etterspørselen etter vare 2 er gitt ved

$y = 500 + p_1 - p_2$

Kostnadene ved å produsere x enheter av vare 1 er

$C_1(x) = 40000+100x+x^2$

Kostnadene ved å produsere y enheter av vare 2 er

$C_2(y) = 50000+400y+y^2$

a) Vis at dersom bedriften ønsker å selge x enheter av vare 1 og y enheter av vare 2 må
$p_1 = 900-x-y \qquad p_2 = 1400-x-2y$

b) Vis at fortjenesten til bedriften vil være gitt ved
$f(x,y) = -2x^2 -3y^2+800x +1000y -2xy -90000 \quad , \quad x\geq 0 \quad y\geq 0$

c) Vi skal her gå ut fra at bedriften vil oppnå en maksimal fortjeneste. Hvor mye bør bedriften produsere og selge av vare 1 og vare 2 for å oppnå maksimal fortjeneste, og hvor stor blir den?

d) Til hver enhet av vare 1 og vare 2 som produseres går det med hhv 3 og 4 enheter av et råstoff.
Hvor mye bør bedriften produsere av hhv vare 1 og vare 2 dersom bedriften har tilgang på 760 enheter av råstoffet.
Benytt Lagrangemultiplikatorer.

Oppgave 4

a) Løs ligningssettet nedenfor ved hjelp av matriseinversjon.

$$
\begin{aligned}
5x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 24 \\
x_1 \qquad\quad + 2x_3 &= 7 \\
2x_1 + x_2 + x_3 &= 7
\end{aligned}
$$

b) Gitt ligningssettet

$$
\begin{aligned}
ax_1 + 2x_2 + ax_3 &= 24 \\
x_1 \qquad\quad + 2x_3 &= 7 \\
2x_1 + x_2 + x_3 &= 7
\end{aligned}
$$

For hvilke verdier av a har ligningssettet eksakt en løsning.

c) Løs ligningssettet i b) ved hjelp av matriseinversjon, eller ved å bruke Cramer's regel.

d) For hvilken verdi av a er $x_1 + x_2 + x_3 = 6$

Oppgave 5

La funksjonen $f(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$ definert for alle x være gitt.

a)

Beregn $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx$ (Hint: bruk substitusjon, sett $u = 1+e^x$

b) Vis at f(x) er symmetrisk om y-aksen. Det vil si $f(x) = f(-x)$.

c) Vis at f(x) er en sannsynlighetstetthet.

Oppgave 6

a) Beregn $\int \frac{12x + 5}{6x^2 + 5x + 1} dx$

b) En bedrift har en grensekostnad $C'(x) = 2 + \frac{12x + 5}{6x^2 + 5x + 1}$

Faste kostnader er 100.
Finn bedriftens kostnadsfunksjon $C(x)$

Fasit til MET 1035 MATEMATIKK 27.11.90

1 (2,0.5) er et globalt maksimumspunkt.
$f(2,0.5) = 2 - \ln 2 \approx 1.3$

2 a) $f(x) > 0$ når $0 < x < 3125$, $f(x) = 0$ når $x = 0$ eller $x = 3125$, $f(x) < 0$ når $x > 3125$

b) $f(x)$ vokser i $<0,1024>$, $f(x)$ avtar i $<1024,\infty>$.
$x = 0$ er et lokalt minimumspunkt med minimumsverdi $f(0) = 0$. $x = 1024$ er et lokalt (også globalt) maksimumspunkt med maksimumsverdi $f(1024) = 256$

3 c) $x = 140$, $y = 120$, $f(140,120) = 26000$

d) $x = 120$, $y = 100$

4 a) $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ b) $a \neq 6$

c) $x_1 = (7a-34)/(6-a)$, $x_2 = (72-14a)/(6-a)$, $x_3 = (38-7a)/(6-a)$

d) $a=5$

5 a) $1/2$

6) a) $\ln|6x^2+5x+1| + C$ d) $C(x) = 2x + \ln(6x^2+5x+1) + 100$

HANDELSHØYSKOLEN BI
SANDVIKA

F

Eksamen i

MET 1035 MATEMATIKK (Kontinuasjon)
SIVILØKONOMSTUDIET

29.05.91 0900 - 1400

Tillatte hjelpemidler:
Alle skriftlige hjelpemidler.
Kalkulator.
Oppgaven er på 3 sider
Innføringsark - Ruteark

Oppgave 1

Løs likningene

a) $(x+2)(x+3)=72$

b) $\ln(\frac{2x^2-x}{3x+6})=0$

c) $\frac{1}{2x+1}+\frac{2}{2x+2}=\frac{3}{2x+3}$

Oppgave 2

Gitt funksjonen $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2}$ $x \neq 0$

a) Finn eventuelle nullpunkter, lokale ekstrempunkter og vendepunkter.
b) Bestem asymptotene til grafen til $f(x)$.
c) Tegn grafen med asymptoter.
d) La t være et tall > 2 og beregn integralet.

$$\int_2^t [1-(\frac{x^2-3x+2}{x^2})]dx$$

Hva er den geometriske tolkningen av integralet?

e) Hva skjer med integralet i d) når $t \to \infty$? Begrunn svaret.

Oppgave 3

En bedrift produserer et bestemt produkt som kan selges direkte til detaljister, eller til selskapet Produktfix. Produktfix vil bearbeide produktet, og selge det videre som et helt annet produkt.

a) Hvis bedriften satser på kun å selge til detaljister vil sammenhengen mellom pris (p) og etterspørsel (x) være $p = 68 - 2x$. Kostnadsfunksjonen $C(x) = 15 + 8x + x^2$.
Hvor mye bør bedriften produsere, og hvilken pris bør den ta dersom den ønsker å maksimere fortjenesten?
Hvor stor blir den maksimale fortjenesten?

b) Hvis bedriften satser på kun å selge til Produktfix vil sammenhengen mellom pris (q) og etterspørsel (y) være $q = 40-y$. Kostnadsfunksjonen $C(y) = 15 + 8y + y^2$.
Hvor mye bør bedriften produsere, og hvilken pris bør den ta dersom den ønsker å maksimere fortjenesten?
Hvor stor blir den maksimale fortjenesten?

c) Hvis bedriften satser på å selge både til detaljister og til Produktfix vil sammenhengen mellom pris og etterspørsel i de to markedene være som angitt i a) og b). Kostnadsfunksjonen $C(x,y) = 15 + 8x+8y + 2xy + x^2 + y^2$

Vis at fortjenesten er gitt ved

$f(x,y)=-3x^2-2y^2+60x-2xy+32y-15$

Hvor mye bør bedriften selge på de to markedene dersom den ønsker å maksimere fortjenesten?
Hva blir prisene, og hvor stor blir den maksimale fortjenesten?

d) Anta at sammenhengen mellom pris og etterspørsel i de to markedene er som angitt i a) og b) og at kostnadsfunksjonen $C(x,y) = 15 + 8x+8y + 2xy + x^2 + y^2$.
Dersom bedriften er bundet til å selge til Produktfix til en pris som er 10 lavere enn til detaljistene, hvor mye bør den nå selge på de to markedene dersom den ønsker å maksimere fortjenesten? Hva blir prisene?

Oppgave 4 (utgår)

Oppgave 5

a) Løs ligningssettet

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= 9 \\ x_1 \qquad\;\; + 3x_3 &= -11 \end{aligned}$$

Ved hjelp av martiseinversjon.

b) La $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \\ 3 \end{bmatrix}$

Finn en matrise X slik at $X = B - AX$

Oppgave 6

a) Skraver definisjonsområdet til funksjonen

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$$

b) Tegn nivålinjen $z = 0$ for funksjonen

$z = f(x,y) = \sqrt{y^2-x^4}$, og skraver definisjonsområdet.

c) Tegn nivålinjer for funksjonen

$z = f(x,y) = (xy)^2$ for $z=1$, $z=4$, og $z = 9$

Fasit til MET 1035 MATEMATIKK 29.05.91

1 a) $x=-11$ eller $x=6$ b) $x=-1$ eller $x=3$ c) $x=-3/4$

2 a) $f(x)=0 \iff x=1$ eller $x=2$, $x=4/3$ er et lokalt minimumspunkt, $f(4/3) = -0.125$. $x=2$ er et vendepunkt $f(2) = 0$.

b) $x=0$, $y=1$ d) $3\ln t + 2/t - 3\ln 2 - 1$

e) Integralet går mot ∞.

3 a) $x = 10$, $p=48$, $\pi(10)=285$ b) $y=8$, $p=32$, $\pi(8)=113$

c) $x=8.8$ $y=3.6$ $p = 50.40$ $q=36.40$. Fortjenesten blir 306.60

d) $x=10.13$ $y=2.27$ $p= 47.73$ $q=37.73$. Fortjenesten blir 301

4

5 a) $X' = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ b) $X' = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

HANDELSHØYSKOLEN BI
SANDVIKA

F

Eksamen i

MET 1035 MATEMATIKK
SIVILØKONOMSTUDIET

26.11.91 0900 - 1400

Tillatte hjelpemidler:
Alle skriftlige
hjelpemidler.
Kalkulator.
Oppgaven er på 3 sider
Innføringsark - Ruteark

Oppgave 1

En bedrift produserer en vare. Sammenhengen mellom pris og etterspørsel er gitt ved $p = 375 - x$.
Bedriften har kostnadsfunksjonen
$C(x) = 0{,}02x^3 - 3x^2 + 175x + 12320$

a) For hvilke verdier av x blir grensekostnaden 31? Forklar hva det vil si at grensekostnaden er 31?

b) Finn den minste verdien grensekostnaden kan få.

c) Finn et uttrykk for profitten $\pi(x)$. Hvor mye bør bedriften produsere for å maksimere profitten, og hvor stor blir den?

Oppgave 2

Salgsprisen pr. enhet for et produkt er p.
Antall solgte enheter er gitt ved uttrykket

$N = 10000e^{-0{,}5p}$

a) Finn et uttrykk for salgsinntekten TS

Beregn $\frac{d(TS)}{dp}$. Hva uttrykker denne størrelsen ?

b) Totalkostnadene er beregnet til $TK = 5000e^{-0{,}5p}$
Finn et uttrykk for profitten π.
Finn π når p=2 og p = 3. Finn den verdien av p som gir størst profitt. Hvor stor blir profitten?

c) Skisser grafen til π for $\frac{1}{2} \leq p \leq 6$

Oppgave 3

La funksjonen f(x,y) være gitt ved $f(x,y) = (x^2-1)(y^2-1)$
Definert for alle verdier av x og y.

a) Finn de stasjonære punktene til f og klassifiser disse.

b) Vi skal nå anta at f er definert i området gitt ved $x^2+y^2 \leq 8$. Forklar hvorfor f både har globalt maksimum og minimum i definisjonsområdet.
Finn de globale ekstrempunktene i dette området.
Benytt enten innsetningsmetoden eller Lagrange-multiplikatorer.

Oppgave 4

Funksjonen $f(x,y) = ye^x - xe^y + 1$ er definert for alle (x,y)

a) Forklar at f(x,y) hverken har globalt maksimum eller minimum.

b) Vis at punktet (0,1) ligger på nivåkurven f(x,y) = 2, og finn ligningen for tangenten i dette punktet.

Oppgave 5

a)

Beregn $\displaystyle\int_5^6 \frac{x}{(x-3)(x-4)}\,dx$

b) Beregn $\displaystyle\int 25x^4 \ln x\,dx$

c) Beregn $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{2}xe^{-2x^2}\,dx$

Oppgave 6

a) Gitt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Beregn A^{-1}

b) Finn en matrise M slik at $MA = A + I$

(I er enhetsmatrisen)

c)

Gitt $B = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 \\ x & 1 & 0 \end{bmatrix}$ Bestem x slik at $B = B^{-1}$

Fasit til MET 1035 MATEMATIKK 26.11.91

1 a) $x=40$ eller $x=60$ b) $x=50$, $C'(50) = 25$
c) $\pi(x) = -0.02x^3+2x^2+200x-12320$, $x=100$, $\pi(100)=7680$

2 a) $d(TS)/dp = 5000(2-p)e^{-0.5p}$
b) $\pi(p)=5000(2p-1)e^{-0.5p}$, $\pi(2)=15000e^{-1}$, $\pi(3)= 25000e^{-1.5}$
$p=2.5$, $\pi(2.5) = 20000e^{-1.25}$

3 a) $(0,0)$ lokalt maksimum, $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,1)$ sadelpunkter.
b) $(\sqrt{8},0)$ $(0,\sqrt{8})$ $(-\sqrt{8},0)$ $(0,-\sqrt{8})$ er globale minimumspunkter med minimumsverdi -7
$(2,2)$, $(-2,2)$, $(-2,-2)$ og $(2,-2)$ er globale maksimumspunker med maksimumsverdi 9.

4 b) $y= (e-1)x + 1$

5 a) $7\ln 2 - 3\ln 3$ b) $5x^5\ln x-x^5+C$ c) $1/8$

6 a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ c) $x=0$

HANDELSHØYSKOLEN BI
SANDVIKA

LF

Eksamen i

MET 1035 MATEMATIKK
SIVILØKONOMSTUDIET
KONTINUASJON
12.06.92 0900 - 1400

Tillatte hjelpemidler:
Alle skriftlige hjelpemidler.
Kalkulator.
Oppgaven er på 2 sider
Innføringark - Ruteark

Oppgave 1. Løs ligningene:

a) $3x+2=\frac{1}{x}$

b) $1-\sqrt{6x-14} = x$

c) $\ln(x+3)+\ln(x+2) = \ln(x+11)$

d) $e^x+3 = \frac{2e^x}{e^x-3}-\frac{9}{e^x-3}$

Oppgave 2. Etterspørselen etter en vare er gitt ved

$$D(p) = 900\ln\frac{100}{p} \qquad p \in \langle 5,70 \rangle$$

hvor p er prisen pr.enhet i kroner.

a) Hva blir etterspørselen hvis prisen er kr 22,- pr.enhet ?
b) Hva må prisen være dersom etterspørselen er 1900 enh. ?
c) Hva blir inntektsfunksjonen R(p) når varen selges for p kr pr.enhet ?
d) Deriver R(p). Hvilken pris gir maksimal inntekt, og hvor stor blir den maksimale inntekten ?

Oppgave 3. Gitt funksjonen $f(x,y)=y\ln x+y\ln y-2x-y$

a) Bestem det største mulige definisjonsområdet til funksjonen.
b) Vis at funksjonen har ett stasjonært punkt , nemlig $(\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2})$
c) Hva slags punkt er punktet i b) ?
d) Vi innfører nå definisjonsområdet $\frac{1}{2}\le x\le 2$ og $1\le y\le 2$

Finn funksjonens globale ekstrempunkter i det nye definisjonsområdet.

Oppgave 4. Gitt funksjonen $z = f(x,y)=x^2+y^2$ definert for alle x og y.

a) Skissèr nivålinjene som svarer til $z=0$, $z=1$, $z=2$ og $z=4$

Gitt funksjonen $g(x,y)=y-x^2$ definert for alle x og y.

b) Bruk Lagranges metode og løs problemet:

Maksimer/minimer $f(x,y)$ når $g(x,y)=1$

c) Kan du begrunne geometrisk hva slags punkt du har funnet ?

Oppgave 5. (utgår)

Oppgave 6.
Gitt matrisene $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

a) Bestem matrisene X og Y slik at XA=B og AY=B

b)

Gitt matrisen $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Bestem $\mathbf{M}^{-1}$.

c) Bruk resultatet fra b) til å løse ligningssettet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Sensorveiledning MET 1035 gitt 12.06.92

Oppgave 1

a) $3x+2 = \frac{1}{x} \iff 3x^2 + 2x = 1 \iff 3x^2 + 2x - 1 = 0 \iff$

$x = -1$ eller $x = \frac{1}{3}$

b) $1-\sqrt{6x-14}=x \Leftrightarrow \sqrt{6x-14}=1-x \Rightarrow$

$6x-14 = 1-2x+x^2 \iff x^2 - 8x + 15 = 0 \iff x=3$ eller $x=5$

Setter vi prøve ser vi at ingen av verdiene passer.
Likningen har ingen løsninger.

c) $\ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(x+11)$

$\ln((x+3)(x+2)) = \ln(x+11)$

$(x+3)(x+2) = x+11$

$x^2+5x+6 = x+11$

$x^2+4x-5 = 0$ $\qquad x=-5$ eller $x = 1$

Setter vi prøve ser vi at kun $x=1$ passer.

d) $e^x + 3 = \frac{2e^x}{e^x - 3} - \frac{9}{e^x - 3}$

$(e^x+3)(e^x - 3) = 2e^x - 9$

$e^{2x} - 9 = 2e^x - 9$

$e^{2x} - 2e^x = 0 \iff e^x(e^x - 2) = 0 \iff$

$e^x = 0$ eller $e^x = 2 \iff x = \ln 2$

Oppgave 2

$D(p) = 900 \ln \frac{100}{p}$ $\qquad p \in \langle 5,70 \rangle$

a) $D(22) = 900 \ln \frac{100}{22} = 1362.72$

b) $$900\ln\frac{100}{p} = 1900 \iff \ln\frac{100}{p} = \frac{19}{9}$$

$$\frac{100}{p} = e^{\frac{19}{9}} \iff p = \frac{100}{e^{\frac{19}{9}}} = 12.1103$$

c) $$R(p) = pD(p) = 900p\ln\frac{100}{p} = 900p(\ln 100 - \ln p)$$

d) $$R'(p) = 900[1\cdot(\ln 100 - \ln p) + p(-\frac{1}{p})] = 900(\ln\frac{100}{p} - 1)$$

$$R'(p) = 0 \iff \frac{100}{p} = e \iff p = \frac{100}{e} \approx 36.78$$

	5		$\frac{100}{e}$		70
$R'(p)$		————————	0	- - - - - - - - - - - -	

$p = \frac{100}{e}$ er et maksimumspunkt med maksimumsverdi

$$R(\frac{100}{e}) = \frac{100}{e}\cdot 900\cdot\ln(\frac{100}{\frac{100}{e}}) = \frac{90000}{e}\ln(e) = 33109.15$$

Oppgave 3

$f(x,y) = y\ln x + y\ln y - 2x - y$

a) Definisjonsområdet er gitt ved $x > 0$, $y > 0$

b) I $\quad f'_x = y\cdot\frac{1}{x} - 2 = 0$

II $\quad f'_y = \ln x + \ln y + y\cdot\frac{1}{y} - 1 = \ln(xy) = 0$

Fra I får vi $y = 2x$ Fra II får vi $xy = 1$

$x^2x = 2x^2 = 1$ Dette gir $x^2 = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$

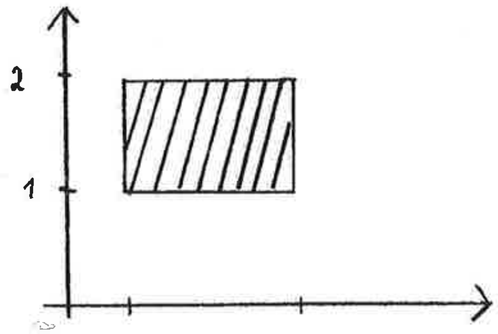
$y = 2x = \sqrt{2}$

c) $$A = f''_{xx} = y(-\frac{1}{x^2}) = -\frac{y}{x^2}$$

$B = f''_{xy} = \frac{1}{x}$ $\qquad$ $C = f''_{yy} = \frac{1}{y}$

Punkt	A	B	C	$AC-B^2$	
$(1/\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$-2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	-4	sadelpunkt

d)



Randa $\quad x = 1/2$
$h(y) = f(1/2,y) = y\ln(1/2) + y\ln(y) - 2(1/2) - y$
$h'(y) = \ln(1/2) + \ln y + y(1/y) - 1 =$
$-\ln 2 + \ln y = 0 \iff \ln y = \ln 2 \iff y = 2$

Randa $\quad x = 2$
$h(y) = f(2,y) = y\ln 2 + y\ln y - 2\cdot 2 - y$
$h'(y) = \ln 2 + \ln y + y(1/y) - 1 = \ln(2y) = 0 \iff$
$2y = 1 \iff y = 1/2$
(2,1/2) ligger ikke i definisjonsområdet.

Randa $\quad y = 1$
$h(x) = f(x,1) = \ln x + 1\cdot\ln 1 - 2x - 1$
$h'(x) = 1/x - 2 = 0 \iff x = 1/2$

Randa $\quad y = 2$
$h(x) = f(x,2) = 2\ln(x) + 2\ln 2 - 2x - 2$
$h'(x) = 2(1/x) - 2 = 0 \iff x = 1$

Ut fra dette finner vi at de mulige ekstrempunktene er (husk at $(1/\sqrt{2}, \sqrt{2})$ er et sadelpunkt)
(1/2,1), (2,1), (1/2,2),(1,2) (2,2) se fig

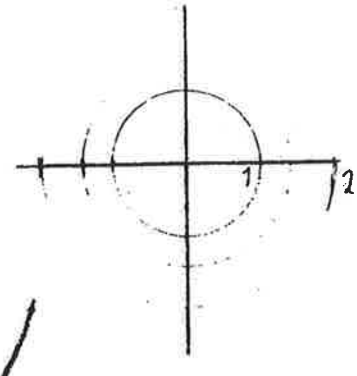
$f(1/2,1) = -2 - \ln 2 = -2.6931$
$f(2,1) = \ln 2 - 5 = -4.3068$
$f(1/2,2) = -3$
$f(1,2) = 2\ln 2 - 4 = -2.6137$
$f(2,2) = 4\ln 2 - 6 = -3.2274$

(1,2) er et globalt maksimumspunkt med maksimumsverdi
$f(1,2) = -2.6137$

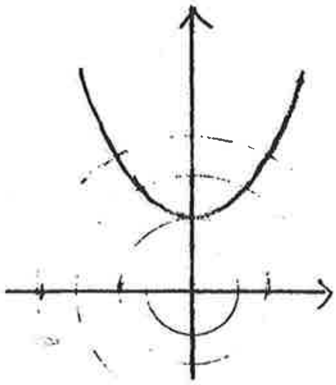
(2,1) er et globalt minimumspunkt med minimumsverdi
$f(2,1) = -4.3068$

Oppgave 4

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$



b)



$y - x^2 = 1$

$y = x^2 + 1$

$F(x,y) = x^2 + y^2 - \lambda(y - x^2 - 1)$

I $F'_x = 2x + 2x\lambda = 0$ II $F'_y = 2y - \lambda = 0$

Fra I følger at $2x(1+\lambda) = 0 \iff x = 0$ eller $\lambda = -1$

Er $x = 0$ må $y = x^2 + 1 = 1$. Er $\lambda = -1$ må $y = \lambda/2 = -1/2$
Dette gir $x^2 = y - 1 = -1/2 - 1 = -3/2$. Denne likningen har ingen løsning.
Mulig ekstrempunkt $(0,1)$ $f(0,1) = 1$

c) Ved å studere grafen til $g(x,y)$ sammen med nivålingene til $f(x,y)$ ser vi at vi har funnet et globalt minimum. (Se punkt b))

Oppgave 6

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad |A| = -4$

$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ $\quad A_{adj} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & -1/4 \end{bmatrix}$

$XA = B \iff XAA^{-1} = BA^{-1} \iff X = BA^{-1} =$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & -1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$AY = B \iff A^{-1}AY = A^{-1}B \iff Y = A^{-1}B =$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 & 1/4 \\ -3/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

b) $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad |M| = 1+1+0-0-0-0 = 2$

$M' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad M_{adj} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} M_{adj} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

c) Vi kan skrive likningssystemet som

$MX = B$ der $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$X = M^{-1}B = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

HANDELSHØYSKOLEN BI
SANDVIKA

F

Eksamen i

MET 1035 MATEMATIKK
SIVILØKONOMSTUDIET
KONTINUASJON
29.08.92 1700 - 2200

Tillatte hjelpemidler:
Alle skriftlige
hjelpemidler.
Kalkulator.
Oppgaven er på 2 sider
Innføringark - Ruteark

Oppgave 1

Løs ligningene

a) $10-7x+x^2=0$

b) $3+\frac{2}{x}=\frac{1}{x^2}$

c) $\sqrt{7x+4}+x=2x+2$

d) $\ln(x+1)+\ln(2x+1)=\ln 3+\ln(x+11)$

Oppgave 2

Gitt funksjonen:

$$f(x,y)=\frac{1}{3}y^3+x^2y-y \quad \text{definert for alle } (x,y).$$

a) Bestem funksjonens stasjonære punkter, og avgjør hva slags punkter det er.

b) Vi lar nå f være definert i området gitt ved:

$$x^2+y^2\leq 9$$

Skravèr definisjonsområdet i xy-planet, og finn funksjonens globale ekstrempunkter og verdier.

Oppgave 3

Løs ligningssettet

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3 &= 4 \\ 3x_1+2x_2+x_3 &= -4 \\ x_1-x_2+x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ved hjelp av a) Cramers regel eller b) matriseinversjon.

Oppgave 4

En kurve i xy-planet er gitt ved ligningen

$$x^3y^2+2x^2y+y^3 = 4$$

Finn ligningen for tangenten i punktet (1,1).

Oppgave 5

Løs følgende integraler

a) $\int_1^9 \frac{1}{x(x+1)}dx$

b) $\int (e^{2x}+\frac{1}{e^x}+2)\,dx$

c) $\int \frac{2}{e^x+2}dx$

d) Finn arealet som er begrenset av grafene til funksjonene

$f(x)=2x^2$ *og* $g(x)=x^3+x$ Fremgangsmåten skal begrunnes.

Oppgave 6

Etterspørselen etter en vare er gitt ved $D(p)=\frac{1000}{e^{0,1p}}$

hvor p er prisen pr enhet i kr.

a) Hva må prisen være dersom etterspørselen er 100 enh?

b) Hva blir inntektsfunksjonen R(p)?

c) Deriver R(p). Hvilken pris gir maksimal inntekt, og hvor stor blir den maksimale inntekten?

d) Kostnaden ved å produsere en enhet av varen er kr 10. Hva blir profittfunksjonen $\pi(p)$?

e) Hvilken pris gir maksimal profitt, og hvor stor blir den?

Fasit til MET 1035 MATEMATIKK 29.08.92

1 a) $x=2$ eller $x=5$ b) $x=-1$ eller $x=1/3$
c) $x=0$ eller $x=3$ d) $x=4$

2 a) $(0,-1)$ lokalt maksimum. $(0,1)$ lokalt minimum
$(-1,0)$, $(1,0)$ sadel
b) $(-\sqrt{5},-2)$, $(\sqrt{5},-2)$ globale minimumspunkter.
Minimumsverdi $-32/3$
$(-\sqrt{5},2)$, $(\sqrt{5},2)$ globale maksimumspunkter.
Maksimumsverdi $32/3$

3 $x_1=-2$, $x_2=0$, $x_3=2$

4 $y=-x+2$

5 a) $\ln(1.8)$ b) $(1/2)e^{2x}-e^{-x}+2x+C$ c) $x - \ln(e^x+2) + C$
d) Arealet blir 1/12.

6 a) $p = 10\ln(10)$ b) $R(p) = 1000p/e^{0.1p}$
c) $p=10$, $R(10) = 10000/e$
d) $1000(p-10)/e^{0.1p}$ e) $p = 20$, $\pi(20) = 1353.35$

BI HANDELSHØYSKOLEN I OSLO
SANDVIKA

LF

Eksamen i

SIV 1000 MATEMATIKK
SIVILØKONOMSTUDIET

21.06.93 0900 - 1400

Tillatte hjelpemidler:
Alle skriftlige hjelpemidler.
Kalkulator.
Oppgaven er på 3 sider
Innføringark - Ruteark

Oppgave 1

Gitt ligningssettet

$$
\begin{aligned}
2x_1 + (a+1)x_2 + 3x_3 &= 2 \\
ax_1 + (a-1)x_2 + x_3 &= 1 \\
(a+1)x_1 \qquad\qquad - x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

For hvilke verdier av a vil ligningssettet ha entydige løsninger? Finn løsningene i det tilfellet at $x_1 = x_3$.

OPPGAVE 2

Et kjemisk firma produserer to typer kunstgjødsel, A og B. Produksjonskostnadene pr. kg er 5 kr for A og 6 kr for B. Salgsprisen for produktene er henholdsvis x kr og y kr pr. kg. Antall tonn som produseres og selges pr uke er

$N_A=25(y-x)$ og $N_B=320+25(x-2y)$

a) Hva bør prisene være for å oppnå maksimal fortjeneste? Hvor stor blir denne fortjenesten?

b) Prøv å begrunne at det virkelig er maksimum du har funnet.

Oppgave 3

La funksjonen f være gitt ved $f(x,y)=x^2-10x+x\sqrt{y}-y$

a) Finn eventuelle stasjonære punkter og klassifiser disse.

b) La f være definert i området gitt ved
$0 \leq x \leq 16 \qquad 0 \leq y \leq 16$.
Finn globale maksimum og minimumspunkter i dette området.

Oppgave 4

En person blir avhengig av en medisin som må inntas i tablettform med en tablett daglig resten av livet. En tablett inneholder 100mg. I løpet av et døgn vil kroppen "bruke opp" 20% av den medisinen som finnes i organismen.

a) Hvor mye medisin finnes i kroppen umiddelbart etter inntak av i) 2.tabletten, ii) 10. tabletten ?

b) Hvor mye medisin vil det være i kroppen like etter inntaket av en tablett når det har gått "lang tid"? (Med uttrykket "lang tid" menes at antall dager går mot uendelig.)

Oppgave 5

a) La $f(t)=3000(2t-t^2) \qquad 0 \leq t \leq 2$

være produksjonsintensiteten i en kobbergruve. Skisser f(t).

b) Den totale produksjonen er gitt ved integralet:

$$\int_0^2 3000(2t-t^2)\,dt$$

Beregn den totale produksjonen.

c) La oss nå anta at produksjonsintensiteten er gitt ved

$$\frac{3000}{a^3}(2at-t^2)$$

her er a en positiv konstant.
For hvilke vedier av t er $f(t) \geq 0$? Begrunn svaret.

Den totale produksjon vil være

$$\int_0^{2a} \left(\frac{3000}{a^3}\right)(2at-t^2)\,dt$$

Finn den totale produksjonen. Her vil svaret være uavhengig av a.

d) Vi regner nå med at prisen på kobber varierer med tiden etter følgende funksjon:

$$p(t)=20t-t^2 , \qquad 0 \le t \le 20$$

Inntekten fra gruven i tidrommet 0 til 2a vil være

$$\int_0^{2a} \frac{3000}{a^3}(2at-t^2)(20t-t^2)\,dt \qquad a \le 10$$

Finn denne inntekten som funksjon av konstanten a.

e) For hvilken verdi av a er inntekten maksimal?

Oppgave 6 (utgår)

Sensorveiledning SIV 1000 MATEMATIKK GITT: 21.06.93.

Oppgave 1

Determinanten til koeffisientmatrisen er:

$$\begin{vmatrix} 2 & a+1 & 3 \\ a & a-1 & 1 \\ a+1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2(a-1) + (a+1)^2 + 0 - 0 -(-a(a+1)) -3(a-1)(a+1) = -a^2+a+6$$

Nå er $-a^2+a+6 = 0 \iff a=-2$ eller $a = 3$.

For at ligningssettet skal ha entydige løsninger må $a \neq -2$ og $a \neq 3$

Løser vi ligningssettet ved Kramer's regel får vi:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & a+1 & 3 \\ 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-a^2+a+6} = \frac{3-a}{-a^2+a+6}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ a & 1 & 1 \\ a+1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-a^2+a+6} = \frac{a-3}{-a^2+a+6}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & a+1 & 2 \\ a & a-1 & 1 \\ a+1 & 0 & -0 \end{vmatrix}}{-a^2+a+6} = \frac{-a^2+2a+3}{-a^2+a+6}$$

Skal $x_1 = x_3$ må $-a^2+2a+3=3-a \iff a=0$ eller $a=3$

Setter vi inn $a=0$ finner vi løsningene

$x_1=3/6=1/2$, $x_2=-3/6=-1/2$, $x_3=3/6=1/2$

Setter vi $a = 3$ inn i likningssystemet og krever at $x_1=x_3$ får vi løsningene $x_1 =0$, $x_2=1/2$ og $x_3=0$

Oppgave 2

$N_A=25(y-x)$ $N_B=320+25(x-2y)$

a) Fortjenesten blir $f(x,y)=N_Ax+N_By-5N_A-6N_B=$

$25(y-x)x+(320+25(x-2y))-5\cdot25(y-x)-6(320+25(x-2y))=$
$-25x^2+50xy-50y^2-25x+495y-1920$

I $f'_x = -50x + 50y - 25 = 0$

II $f'_y = 50x -100y + 495 = 0$

I+II $-50y + 470 = 0$

Dette gir $y = 9.40$ Settes dette inn i I får vi

$x = (50y-25)/50 = y-0.5 = 9.40 - 0.5 = 8.90$

b) $A=f''_{xx} = -50,$ $B=f''_{xy} = f''_{yx} = 50$ $C=f''_{yy} = -100$

$AC-B^2 = 2500 > 0$ for alle x,y. Da $A < 0$ følger at vi har funnet et globalt maksimum.

Oppgave 3

$f(x,y)=x^2-10x+x\sqrt{y}-y$

a) I $f'_x=2x-10+\sqrt{y}=0$

II $f'_y=\frac{x}{2\sqrt{y}}-1=\frac{1}{2}xy^{-\frac{1}{2}}=0$

Av II følger at $\sqrt{y} = x/2$ Settes dette inn i I får vi

$2x - 10 + x/2 = 0,$ $x=4,$ $y = (x/2)^2 = 4$

$A=f''_{xx}=2$

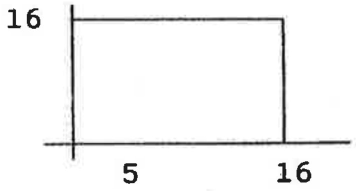
$B=f''_{xy}=\frac{1}{2\sqrt{y}}$

$f''_{yy}=(-\frac{1}{2})(\frac{1}{2})xy^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4}xy^{-\frac{3}{2}}$

I punktet $(4,4)$ er $A = 2,$ $B=1/4$ og $C= -1/8$

$AC-B^2= -5/16.$ $(4,4)$ er et sadelpunkt.

b)



Randa $x = 0$, $h(y) = f(0,y) = -y$, $h'(y) = -1$

Randa $y = 0$, $h(x) = x^2-10x$, $h'(x) = 2x-10=0$

$x=5$

Randa $x=16$ $h(y)=f(16,y)=96+16\sqrt{y}-y$

$h'(y) = \frac{16}{2\sqrt{y}} - 1 = 0$ $\sqrt{y}=8$ $y = 64$

Randa $y = 16$

$h(x) = f(x,16) = x^2-10x+4x-16=x^2-6x-16$,
$h'(x) = 2x-6 = 0$, $x=3$

Mulige ekstrempunkter:
(0,0), (5,0), (16,0), (0,16), (3,16), (16,16)
(Husk (4,4) er et sadelpunkt)

$f(0,0) = 0$, $f(5,0) = -25$, $f(16, 0) = 96$
$f(0,16)= -16$, $f(3,16) = -25$, $f(16,16) = 144$

(5,0) og (3,16) er globale minimumspunkter med minimumsverdi -25. (16,16) er et globalt maksimumspunkt med maksimumsverdi 144.

Oppgave 4

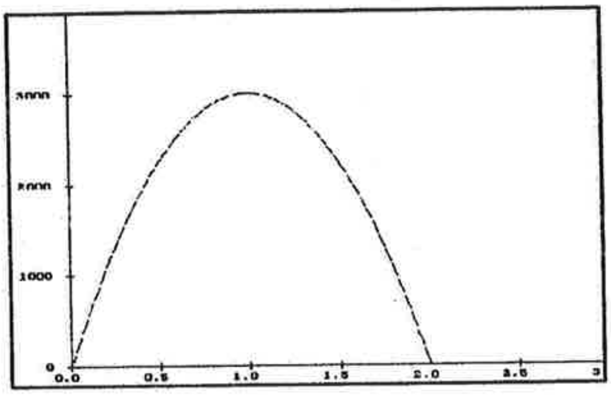
a) i) Umiddelbart etter inntak av den 2. tabletten vil det være $100 \cdot 0.8+100=$ 180mg i kroppen.

ii) Umiddelbart etter inntak av de 10. tabletten vil det være $100 \cdot 0.8^9+100 \cdot 0.8^8+....+100 =$
$100(1+0.8+0.8^2+0.8^3+.....+0.8^9)=$
$100(1-0.8^{10)}/(1-0.8) =446.31$ mg

b) Etter lang tid vil det like etter inntaket av en tablett være $\lim_{n\to\infty} 100(1-0.8^n)/(1-0.8) = 500$mg i kroppen.

Oppgave 5

a) $f(t) = 3000(2t-t^2) \qquad 0 \le t \le 2$



b) $$\int_0^2 3000(2t-t^2)\,dt = 3000\cdot\Big|_0^2 (t^2-\frac{1}{3}t^3) = 4000$$

c) Da $t \ge 0$ følger at $2at-t^2 = (2a-t)t \ge 0$ når $2a-t \ge 0$
d.v.s $0 \le t \le 2a$

$$\int_0^{2a} (\frac{3000}{a^3})(2at-t^2)\,dt = (\frac{3000}{a^3})\cdot\Big|_0^{2a} (at^2-\frac{1}{3}t^3) =$$

$$\frac{3000}{a^3}(4a^3-\frac{8a^3}{3}) = 4000$$

d) $$\int_0^{2a} \frac{3000}{a^3}(2at-t^2)(20t-t^2)\,dt=$$

$$\frac{3000}{a^3}\int_0^{2a}(40at^2-20t^3-2at^3+t^4)\,dt=$$

$$\frac{3000}{a^3}\Big|_0^{2a}(40a\frac{t^3}{3}-20\frac{t^4}{4}-2a\frac{t^4}{4}+\frac{t^5}{5}) = 24000(\frac{10}{3}a-\frac{1}{5}a^2)$$

e) Inntekten $g(a)=24000(\frac{10}{3}a-\frac{1}{5}a^2)$ $g'(a)=24000(\frac{10}{3}-\frac{2}{5}a)=0$

a=25/3=8.3333,
Da g'(a) > 0 for a < 25/3 og g'(a) > 0 for a > 25/3
vil a = 25/3 gi maksimal inntekt.

BI HANDELSHØYSKOLEN I OSLO
SANDVIKA

F

Eksamen i
SIV 1000.01 MATEMATIKK
SIVILØKONOMSTUDIET
KONTINUASJON
10.09.1993 0900-1400

Tillatte hjelpemidler:
Alle skriftlige.
Kalkulator
Oppgaven er på 3 sider
Innføringsark - ruter.

OPPGAVE 1

Bruk metoden med Lagrangemultiplikatorer til å løse følgende problem:
Bestem maksimum og minimum for $f(x,y)=ye^x$ under bibetingelsen

$$x^2+y^2=6$$

OPPGAVE 2 (utgår)

OPPGAVE 3

Gitt to matriser A og B.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Finn A^{-1} og B^{-1}.

b) Bestem matrisene X og Y slik at AX=BA og YA=AB.

OPPGAVE 4

a) Deriver funksjonen $f(x) = e^x + e^{-x}$

b) Bruk resultatet til å beregne det ubestemte integralet

$$\int (e^x+e^{-x})^k (e^x-e^{-x})\,dx \quad \text{hvor k er en konstant.}$$

c) Benytt resultatet fra b) til å beregne

$$\int_0^\infty \frac{e^x-e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2}\,dx$$

OPPGAVE 5

(I denne oppgaven kan du gå ut fra at de lokale ekstrempunktene er globale.)

Sammenhengen mellom produsert mengde N av en vare og mengden av to produksjonsfaktorer x og y er gitt ved

$$N(x,y) = 80-2(x-6)^2-(y-3)^2-(x-6)(y-3)$$

a) Hvilke verdier av x og y gir størst produksjon, og hvor stor er denne produksjonen?

Anta at produsenten kan selge hele produksjonen N for 10 kr pr. enhet, mens han må betale 12 kr pr. enhet for x og 6,50 kr pr. enhet for y.

b) Finn de verdiene av x og y som maksimerer overskuddet P ved salget av hele produksjonen N, (vi ser bort fra andre utgifter enn det som betales for x og y), og finn de tilsvarende verdiene for N og P.

c) Det viser seg at produsenten ikke kan skaffe mer enn høyst 5 enheter av x og 2 enheter av y. Hvilke mengder av x og y må han nå bruke for å maksimere P?

OPPGAVE 6

Gitt funksjonene $f(x)= x^2$ og $g(x)= \sqrt{x}$ $D_f=D_g=[0,\infty\rangle$

a) Tegn grafene til f og g i samme koordinatsystem.

b) Bestem ved regning koordinatene til skjæringspunktene mellom grafene.

c) Finn det arealet som <u>er avgrenset mellom</u> grafene.

d) Løs ulikheten $g(x)>f(x)$.

e) For hvilken verdi av x er differensen $\delta(x)=g(x)-f(x)$ størst?

f) En rett linje $h(x)= kx+1$ er tangent til grafen til g for en bestemt verdi av k. Finn denne verdien.

Fasit til SIV 1000 MATEMATIKK 10.09.93

1 $(2,-\sqrt{2})$ Globalt minimum $f(2,-\sqrt{2})=-\sqrt{2}e^2\approx -10.4$
$(2,\sqrt{2})$ Globalt maksimum $f(2,\sqrt{2})=\sqrt{2}e^2\approx 10.4$

2

3 a) $$A^{-1}=\begin{bmatrix}-1/2 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & 2\\ 1/2 & 0 & -1/2\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

b) $$X=\begin{bmatrix}-1/2 & -1/2 & -1/2\\ -3 & 0 & -1\\ 3/2 & 1/2 & 3/2\end{bmatrix}$$

3 a) $$A=\begin{bmatrix}1/2 & -1 & -5/2\\ 1/2 & 2 & 5/2\\ -1/2 & -1 & -3/2\end{bmatrix}$$

4 a) $f'(x)=e^x-e^{-x}$

b) $\frac{1}{k+1}e^{x}+e^{-x}+C$ *når* $k\neq -1$

$\ln(x^{x}+e^{-x})$ *når* $k=-1$

c) 1/2

5 a) $x=6$ $y=3$ $N(6,3)= 80$

b) $x=5.75$ $y=2.80$ $N(5.75,2.80)=79.785$
$P(5.75,2.80)=710.65$

c) $x=5$ $y= 2$

6) b) $(0,0)$ $(1,1)$ c) $1/3$ d) $0 < x < 1$

e) $x=\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$ f) $k= 1/4$

HANDELSHØYSKOLEN BI
SANDVIKA

LF

Eksamen i

SIV 1000 MATEMATIKK
SIVILØKONOMSTUDIET

15.06.94 0900 - 1400

Tillatte hjelpemidler:
Alle skriftlige hjelpemidler.
Kalkulator.
Oppgaven er på 2 sider
Innføringsark- Ruteark

Oppgave 1

En bedrift har funnet en modell som beskriver etterspørselen, D, som funksjon av prisen, p.

$$D(p) = 100pe^{-0,2p} \qquad p \in [p_o, 20]$$

Modellen har bare mening dersom D(p) er en synkende funksjon.

a) Finn den laveste verdien $\mathbf{p_o}$ kan ha dersom modellen skal være realistisk.

Etterspørselselastisiteten er definert som:

$$El_p\, D(p) = \frac{p \cdot D'(p)}{D(p)}$$

b) Finn et uttrykk for $El_pD(p)$.

c) Hvor stor blir elastisiteten dersom prisen er 11? Tolk svaret. Anta at bedriften ønsker å maksimere inntekten. Hva vil du anbefale bedriften å gjøre dersom p=11? Begrunn svaret.

d) Finn et uttrykk for inntekten, **I(p)**. Bestem den prisen $\mathbf{p_1}$ som maksimerer inntekten.

e) Ved hvilken pris synker inntektsfunksjonen raskest?

Tilbudsfunksjonen for produktet er av formen

$$T(p) = 10pe^{ap}$$

f) Bestem a slik at T(p)=D(p) for $p=\mathbf{p_1}$

Oppgave 2

Gitt funksjonen $f(x,y)=2\ln x+\ln y$

a) Skravèr definisjonsområdet i xy-planet.

b) Tegn skjæringskurven mellom grafen til f og xy-planet.

c) Maksimer f(x,y) under bibetingelsen $y+x^2=20$.
Begrunn at det virkelig er maksimum du har kommet frem til.

Oppgave 3

I denne oppgaven skal vi bare ta for oss personer som hadde en årsinntekt på 50000 kr eller mer. I Norge kunne denne gruppens inntekter for noen år siden ganske godt beskrives ved inntektsfordelingen:

$$f(r) = \frac{1,4 \cdot 10^9}{r^{2,5}}$$

Her betyr r den årlige inntekten i 1000-kr, dvs funksjonen er definert for $r \in [50, \infty\rangle$

a) Hvor mange hadde inntekt større enn 50000kr ?

b) Hvor mye tjente alle disse tilsammen, og hvor stor var gjennomsnittinntekten?

c) Hvor stor %-del tjente mer enn 1 million ?

d) 50% av den aktuelle befolkningen tjener mindre enn en bestemt inntekt $\mathbf{r_1}$ (men fremdeles mer enn 50000). Finn $\mathbf{r_1}$.

Oppgave 4

Gitt ligningssettet

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 1 \\ ax_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 2 \\ -2x_1 + ax_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

a) Vis at ligningssettet alltid har en løsning.
(for alle verdier av a)

b) Bruk Cramers' regel og finn løsningen.

c) Undersøk om det finnes verdier av a slik at $x_1+x_2+x_3 = 0$

Sensorveiledning SIV 1000 gitt 15.06.94

Oppgave 1

a) $D(p) = 100pe^{-0.2p}$

$D'(p) = 100e^{-0.2p} + 100pe^{-0.2p}(-0.2) =$

$100(1-0.2p)e^{-0.2p}$

Skal $D'(p)=0$ må $1-0.2p = 0$, dvs $p = 5$

$1-0.2p < 0 \iff p>5$ Vi får derfor at $D'(p) < 0$ når $p>5$

$D(p)$ er derfor strengt avtagende når $p \geq 5$.

Vi må derfor velge $p_0 = 5$.

b) $$El_pD(p) = \frac{pD'(p)}{D(p)} = \frac{p \cdot 100(1-0.2p)e^{-0.2p}}{100pe^{-0.2p}} = 1-0.2p$$

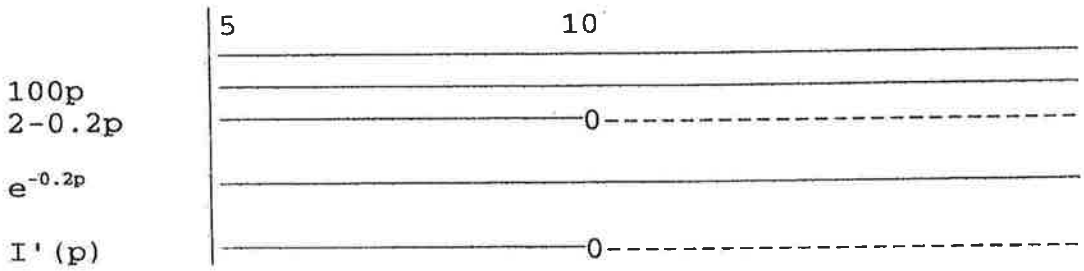
c) Hvis $p=11$ så er $El_p(D(p)) = 1 - 0.2 \cdot 11 = -1.2$

Dersom målet er å maksimere inntekten vil jeg anbefale å senke prisen da 1% nedgang i denne vil resultere i en økning på 1.2% i etterspørselen. Inntekten vil øke.

d) $I(p) = pD(p) = p \cdot 100pe^{-0.2p} = 100p^2e^{-0.2p}$

$I'(p) = 100[2pe^{-0.2p} + p^2e^{-0.2p}(-0.2)] =$

$100(2p-0.2p^2)e^{-0.2p} = 100p(2-0.2p)e^{-0.2p} = 0 \iff p = 10.$



$p_1 = 10$ maksimerer inntekten.

e) $I''(p) = 100[(2-0.4p)e^{-0.2p} + (2p-0.2p^2)e^{-0.2p}(-0.2)] =$

$100(0.04p^2 - 0.8p + 2)e^{-0.2p} = 0 \iff 0.04p^2-0.8p + 2 = 0$

$\iff p=\dfrac{0.8\pm\sqrt{0.32}}{0.08}=10\pm5\sqrt{2}$ $\quad p\approx2.93$ eller $p\approx17.07$

$I''(p) = 4(p-(10-5\sqrt{2}))(p-(10+5\sqrt{2}))e^{-0.2p}$

	5		$10+5\sqrt{2}$	
$4(p-(10-5\sqrt{2}))$		————————		————————
$p-(10+5\sqrt{2})$		- - - - - - - -	0	————————
$e^{-0.2p}$		————————		————————
$I''(p)$		- - - - - - - -	0	————————

Inntektsfunksjonen synker raskest når $p = 10+5\sqrt{2} \approx 17.07$

f) Skal $T(p) = D(p)$ må $10pe^{ap} = 100pe^{-0.2p}$

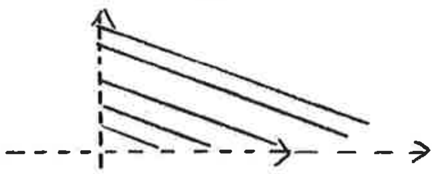
$e^{ap} = 10e^{-0.2p}$. Nå er $p = p_1 = 10$

$e^{10a} = 10e^{-2}$ $\qquad$ $10a = \ln10 + \ln(e^{-2}) = \ln10 - 2$

$a = (\ln10 - 2)/10 \approx 0.0302585$

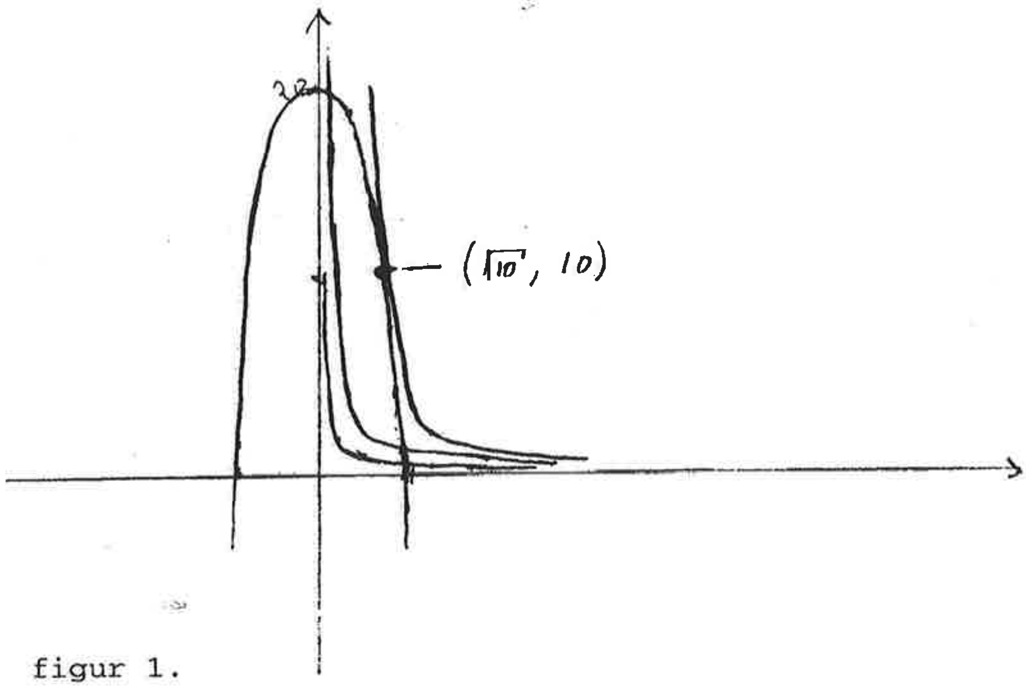
Oppgave 2

a) $f(x,y) = 2\ln x+\ln y$, $\quad x>0$ og $y>0$



b) $f(x,y) = 0 \iff 2\ln x+\ln y=0 \iff \ln y = -2\ln x = \ln(x^{-2})$

$y=x^{-2} = 1/x^2$



figur 1.

c) $F(x,y) = f(x,y) - \lambda(g(x,y)-C) = 2\ln x + \ln y - \lambda(y+x^2-20)$

I $\quad F'_x = 2/x - 2x\lambda = 0$

II $\quad F'_y = 1/y - \lambda = 0$

I $\quad 2/x - 2x\lambda = 0$

2xII $\quad 2x/y - 2x\lambda = 0$

Herav følger $2/x = 2x/y \Rightarrow y = x^2$

Setter vi dette inn i bibetingelsen $y + x^2 = 20$ får vi
$2x^2 = 20 \qquad x^2 = 10 \qquad x = \sqrt{10}$

$y = 20 - x^2 = 20 - 10 = 10.$

$f(\sqrt{10},10) = 2\ln(10).$

For å begrunne at dette er et maksimum kan vi studere

nivålinjene $2\ln x + \ln y = C$

$\ln y = -2\ln x + C = \ln(x^{-2}) + C$

$y = e^C x^{-2} = C^*/x^2 \qquad C^* > 0$

Noen av disse nivålinjene og bibetingelsen $y = -x^2+20$ er tegnet inn i figur 1. Som det fremgår av figuren vil $f(x,y)$ oppnå et **maksimum** i punktet $(\sqrt{10},10)$, da dette er det punktet på bibetingelsen som gir maksimal verdi for $f(x,y)$.

Maksimumsverdien er $f(\sqrt{10},10) = 2\ln 10$.

Alternativ løsning: Setter vi $y = -x^2+20$ inn i funksjonen får vi $h(x) = 2\cdot\ln x + \ln(20-x^2)$

$D_h = \langle 0, \sqrt{20}\rangle$

$$h'(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{20-x^2}(-2x) = \frac{-4(x^2-10)}{x(20-x^2)} = \frac{-4(x-\sqrt{10})(x+\sqrt{10})}{x(20-x^2)}$$

	0		$\sqrt{10}$		$\sqrt{20}$
-4		- - - - - - - -	- - -	- - - - - - - -	
$x-\sqrt{10}$		- - - - - - - -	0	————————	
$x+\sqrt{10}$		————————	———	————————	
x		————————	———	————————	
$20-x^2$		————————	———	————————	
$h'(x)$		————————	0	- - - - - - - -	

Som vi ser vil $x = \sqrt{10}$ være et globalt maksimum.
$y = 20 - x^2 = 20 - 10 = 10$. $h(\sqrt{10}) = 2\ln 10$.

Oppgave 3

a) $$f(r) = \frac{1.4\cdot 10^9}{r^{2.5}} = 1.4\cdot 10^9 r^{-2.5}$$

Totalt antall skattebetalere er

$$N = 1.4\cdot 10^9 \int_{50}^{\infty} r^{-2.5}dr = 1.4\cdot 10^9 \Big|_{50}^{\infty} \frac{r^{-1.5}}{-1.5} =$$

$$\frac{1.4\cdot 10^9}{1.5} 50^{-1.5} = 2639865 \approx 2{,}64 mill$$

b) Tilsammen tjener de

$$M = 1.4\cdot 10^9 \int_{50}^{\infty} r\cdot r^{-2.5}dr = 1.4\cdot 10^9 \int_{50}^{\infty} r^{-1.5}dr =$$

$$1.4\cdot 10^9 \Big|_{50}^{\infty} \frac{r^{-0.5}}{-0.5} = 2.8\cdot 10^9 50^{-0.5} = 395979796$$

Dvs ca 396 000 mill kr

Gjennomsnittsinntekt $m = \frac{M}{N} = 150$ *tusen* kr

c) $$\int_{1000}^{\infty} 1.4 \cdot 10^9 r^{-2.5} dr = \Big|_{1000}^{\infty} \frac{1.4 \cdot 10^9}{-1.5} r^{-1.5} = \frac{1.4 \cdot 10^9}{1.5} \cdot 1000^{-1.5} = 29515$$

Antall prosent som har en inntekt på over en million er derfor $\frac{29515}{2639865} \cdot 100 \approx 1.12\%$

d) r_1 må være et tall slik at 50% tjener mer enn r_1.

Følgende ligning må derfor være oppfylt.

$$\int_{r_1}^{\infty} 1.4 \cdot 10^9 r^{-2.5} dr = \frac{1}{2} \cdot \frac{1.4 \cdot 10^9}{1.5} 50^{-1.5}$$

herav følger.

$$\int_{r_1}^{\infty} r^{-2.5} dr = \frac{1}{2 \cdot 1.5} 50^{-1.5}$$

$$\Big|_{r_1}^{\infty} \frac{r^{-1.5}}{-1.5} = \frac{{r_1}^{-1.5}}{1.5} = \frac{1}{3} 50^{-1.5}$$

$$r_1 = \left(\frac{1}{2} 50^{-1.5}\right)^{-\frac{1}{1.5}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{1.5}} \cdot 50 = 79.37 \quad \text{dvs ca 79 tusen kr}$$

Oppgave 4

a) Ligningssystemet kan skrives som AX = b

Hvor $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ a & 3 & 3 \\ -2 & a & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Determinanten til A er

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ a & 3 & 3 \\ -2 & a & 1 \end{vmatrix} = 6-18+4a^2-6a-3a+24 = 4a^2 -9a + 12$$

Annengradsligningen $4a^2 - 9a + 12 = 0$ har ingen løsninger.

Ligningssystemet vil derfor alltid ha en løsning.

b) $$| B_1 | = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & a & 1 \end{vmatrix} = 3+27+8a-3a-6-36= \quad 5a-12$$

$x_1 = (5a-12)/(4a^2-9a+12)$

$$| B_2 | = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ a & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4-6+12a-18-a+16 = 11a-4$$

$x_2 = (11a-4)/(4a^2-9a+12)$

$$| B_3 | = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ a & 3 & 2 \\ -2 & a & 3 \end{vmatrix} = 18-12+a^2-4a-9a+6 = a^2-13a+12$$

$x_3 = (a^2-13a+12)/(4a^2-9a+12)$

c) $x_1+x_2+x_3 = (5a-12 + 11a-4 + a^2-13a+12)/(4a^2-9a+12) =$

$(a^2+3a-4)/(4a^2-9a+12) = 0$

Løser vi ligningen $a^2+3a-4= 0$ får vi $a = -4$ eller $a = 1$

HANDELSHØYSKOLEN BI
SANDVIKA

F

Eksamen i

SIV 1000.01 Matematikk
Kontinuasjon

29.08.1994 0900-1400

Tillatte hjelpemidler:
Alle skriftlige.
Kalkulator.
Oppgaven er på 2 sider
Innføring-ruteark

OPPGAVE 1

En bedrift skal annonsere for et produkt i avisene A og B. Dersom man bruker x kr i A og y kr i B, viser det seg at totalsalget blir

$$S(x,y)=\frac{100000x}{4000+x}+\frac{288000y}{2000+y}$$

Inntekten R er 25% av S.

a) Vis at overskuddet P blir:

$$P(x,y)=\frac{25000x}{4000+x}+\frac{72000y}{2000+y}-x-y$$

b) Finn de verdiene av x og y som maksimerer overskuddet.

c) Bedriften kan imidlertid bare bruke 12000 kr til annonseringen. Hvor stort beløp bør nå brukes i hver av avisene for å oppnå størst overskudd?

OPPGAVE 2

Ligningen $2y^2+x^2+10y-4x=8$ fremstiller en kurve i xy-planet.

Kurven har to tangenter parallelle med x-aksen. Finn koordinatene til tangeringspunktene.

OPPGAVE 3

Gitt matrisene $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ og $N = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

a) Beregn M^{-1} , N^{-1} , MN og $(MN)^{-1}$.

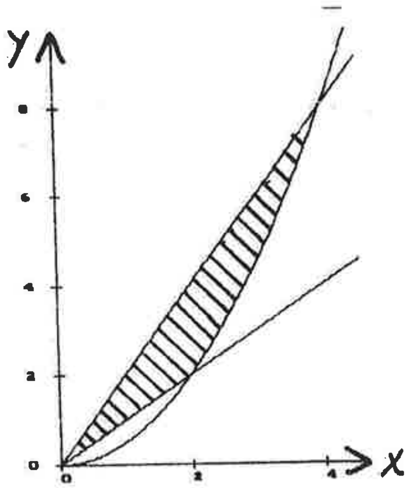
Vis ved regning at $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$

b) La A og B være to kvadratiske matriser av samme størrelse. Begge de inverse matrisene eksisterer.

Vis at : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

OPPGAVE 4 (utgår)

OPPGAVE 5



Figuren viser grafen til parabelen $y=\frac{1}{2}x^2$ og de to rette linjene $y=x$ og $y=2x$.

Finn det skraverte arealet.

Fasit til Siv 1000 Matematikk 29.08.94

1 b) x=6000 y=10000 c) x=4200 y=7800

2 (2, -6) og (2,1)

3 $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $N^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $MN = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$(MN)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $N^{-1} \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

4

5 Det søkte arealet er $\frac{14}{3}$

HANDELSHØYSKOLEN BI
SANDVIKA

F

Eksamen i
SIV 1000.01 MATEMATIKK

SIVILØKONOMSTUDIET

21.06.95 0900-1400

Tillatte hjelpemidler:
Alle skriftlige og
kalkulator.
Oppgaven er på 3 sider
Innføring-ruteark.

Ved besvarelsen skal fremgangsmåten vises.

OPPGAVE 1

Gitt funksjonen $f(x,y)=(x^2-4)(y^2-1)$, definert for alle (x,y).

a) Hva blir skjæringskurven mellom grafen til f og xy-planet?

b) Finn alle de stasjonære punktene, og klassifiser dem ved å bruke 2.derivert-testen.

c) Er noen av punktene i b) globale ekstremalpunkter?

d) Vi lar nå definisjonsområdet være $x^2+y^2\leq 1$.

Bestem globalt maksimum og minimum for $f(x,y)$ nå.

En annen funksjon $g(x,y)$ er gitt ved

$$g(x,y) = \ln[f(x,y)]$$

e) Skraver definisjonsområdet til g i xy-planet.

Punktet $P(\sqrt{5},\sqrt{e+1})$ ligger på en av nivålinjene til g.

f) Hvilken funksjonsverdi har denne nivålinjen?

g) Finn ligningen til tangenten til nivålinjen i punktet P.

OPPGAVE 2

Ved begynnelsen av 1990-årene satte man opp en modell for arbeidsledigheten i et land. Antallet arbeidsledige kunne uttrykkes:

$$N(t) = 85e^{-0,05t} - 50e^{-0,2t} + 25$$

N(t) er antallet i tusen, og t er antall år etter 1990.

a) Hva var antallet i 1990, 1993 og hva vil det være i 1997 dersom modellen er riktig?

b) Når vil arbeidsledigheten være størst, og hvor mange vil da være ledige?

c) Når vil arbeidsledigheten synke sterkest?

d) Hvordan vil du gi en praktisk tolkning av N'(t) ?

e) Bruk den deriverte til å beregne hvor mye arbeidsledigheten forandrer seg i gjennomsnitt pr. mnd. i år 2000.

OPPGAVE 3

Gitt ligningssettet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= a^2 \\ 2x_1 \qquad\quad + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= a \end{aligned}$$

a) Beregn koeffisientdeterminanten $|A|$

b) Finn den a-verdien som gjør at x_1 blir størst mulig. Hva blir da x_1 ?

c) Bestem a slik at $x_1+x_2+x_3 = 0$

OPPGAVE 4 (utgår)

OPPGAVE 5

Ved å investere i to sektorer med henholdsvis x og y millioner kr. vil en bedrift få en inntekt som kan uttrykkes ved

$$R(x,y) = 8x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}$$

a) Sett opp et uttrykk for overskuddsfunksjonen, $\pi(x,y)$, dersom investeringsbeløpene antas å være eneste utgifter.

b) Hvilke beløp bør investeres for å oppnå maksimalt overskudd?

c) Bedriften må sette følgende budsjettbetingelse på investeringene :

$$x+y = 120$$

Hvordan bør dette beløpet fordeles på x og y for oppnå maksimalt overskudd?

Fasit til Siv 1000 Matematikk 21.06.95

1 a) Skjæring med x-y planet langs linjene
x=-2 x=2 y=-1 y=1

b) (0,0) Lok. maks,
(2,1), (2,-1), (-2,1) og (-2,-1) er sadelpunkter.

c) Vi har ingen globale ekstremalpunkter.

d) (0,0) er et globalt maks. punkt, med maksimumsverdi 4
(0,1) og (0,-1) er et globalt min. punkter, med minimumsverdi 0

f) 1 g) $y = -\frac{\sqrt{5}\cdot e}{\sqrt{e+1}}x + \frac{6+e}{\sqrt{e+1}}$

2 a) N(0)=60.0 (60000), N(3)=70.7 (70700)
N(7)=72.6 (72600)

b) Størst ledighet etter 5.7 år (ca 1996)
Da er ledigheten ca 72900.

c) år 2005

d) $N'(t)$ beskriver den momentane forandringen i ledigheten.

e) ca 100 pr måned.

3 a) $|A| = 1$ b) $a = 1$ $x_{1\max} = -1$ c) a=1

4 a)

5 a) $\pi(x,y) = 8x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}} - x - y$ b) x=128 y=64

c) x=80 y=40

HANDELSHØYSKOLEN BI
SANDVIKA

LF

Eksamen i

SIV 1000.01
MATEMATIKK
SIVILØKONOMSTUDIET

06.09.95 0900 - 1400

Tillatte hjelpemidler:
Alle skriftlige

Kalkulator.
Oppgaven er på 3 sider
Innføringark - Ruteark

NB! Fremgangsmåten skal vises.

Oppgave 1

Gitt likningssettet

$$2x_1 + x_2 + ax_3 = 1$$
$$2ax_1 + ax_2 + 2x_3 = 2$$
$$4x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3$$

a) For hvilke verdier av a har likningssettet eksakt en løsning?

b) For hvilke verdier av a er $x_3 = 3$?

c) For hvilke verdier av a er $2x_1 + x_2 = 0$?

Oppgave 2

En bedrift får 5 kr for hver enhet av et produkt som den selger. Dersom bedriften benytter x kr til reklame per uke, regner den med å selge $Q(x)=\dfrac{800x}{x+1000}$ enheter per uke.

a) Hvilken grense nærmer salget seg mot når x øker?

b) For hvilket beløp må bedriften reklamere dersom det ønsker å selge 600 enheter?

c) Anta at bedriften ikke har andre kostnader enn reklameutgifter. Forklar hvorfor overskuddsfunksjonen blir $\pi(x)=5\cdot Q(x)-x$. Hva blir bedriftens maksimale overskudd?

Oppgave 3

a) Løs ulikheten $\frac{x^2+1}{x+3}>5$

b) Finn integralet $\int\frac{x^2+1}{x+3}dx$

Finn arealet begrenset av den rette linjen y = 5 og

grafen til $f(x)=\frac{x^2+1}{x+3}$ (Hint: Skisser grafen til f(x))

Oppgave 4

Etterspørselen etter en vare for en familie er gitt ved

$f(x,y)=20x^{-0.8}y^{1.5}$

Her er x varens pris og y familiens inntekt.

a) Hva blir etterspørselen dersom x = 1 og y = 9 ?

b) Anta at prisen øker med tiden etter formelen x(t)= t, og at familiens inntekt øker etter formelen y(t) = 9t. Skriv opp etterspørselen etter varen som funksjon av tiden t. For hvilken verdi av t er etterspørselen 1620?

c) Gjennom punktet (1,9) går det en nivålinje. Finn likningen for tangenten i dette punktet.

Oppgave 5

En bedrift produser et produkt. Antall enheter, z som produseres er avhengig av to innsatsfaktorer x og y

$$z=f(x,y)=\ln(xy+1) \quad , x\geq 0 \ , \quad y\geq 0$$

a) Beregn f'_x og f'_y

b) Bedriften benytter 4 enheter av innsatsfaktoren x. Hvor mye må den da benytte av innsatsfaktoren y for å produsere 4 enheter?

c) Skisser nivåkurven $f(x,y) = 4$

d) Salgsprisen pr enhet av produktet er 102. Anta at de eneste kostnadene bedriften har ved produksjonen er utgifter til innsatsfaktorene x og y. Kostnadene per enhet for henholdsvis innsatsfaktoren x og y er 10 og 20. Skriv opp overskuddsfunksjonen $\pi(x,y)$.

e) Finn eventuelle stasjonære punkter til funksjonen $\pi(x,y)$ og avgjør hva slags punkter det er.

f) Vi skal her gå ut fra at bedriften oppnår et maksimalt overskudd. Hvor mye bør den benytte av innsatsfaktorene x og y? Hva blir det maksimale overskuddet?

g) Bedriften ønsker å holde produksjonskostnadene på 160. Hvor mye bør den bruke av de to innsatsafaktorene for å oppnå maksimal produksjon?

Sensorveiledning SIV 1000 gitt 06.09.95

Oppgave 1

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ 2a & a & 2 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 4a+8+8a^2-16-4a-4a^2 = 4a^2-8$

Skal likningssettet ha eksakt en løsning må $a^2 \neq 2$

det vil si a $a\neq-\sqrt{2}$ *og* $a\neq\sqrt{2}$

b) $|B_3| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2a & a & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 6a+8+8a^2-16-6a-4a = 4a-8$

$x_3=\frac{|B_3|}{|A|}=\frac{4a-8}{4a^2-8}=3 \qquad 12a^2-4a-16=0 \qquad a=-1 \text{ eller } a=\frac{4}{3}$

c) $|B_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2a+6+8a-8-4-3a^2 = -3a^2+10a-6$

$|B_2| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ 2a & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 8+8+6a^2-12-4a-8a = 6a^2-12a+4$

$2x_1+x_2=\frac{2(-3a^2+10a-6)+6a^2-12a+4}{4a^2-8}=\frac{8a-8}{4a^2-8}=0 \qquad a=1$

Oppgave 2

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{800x}{x+1000}=\lim_{x\to\infty}\frac{800}{1+\frac{1000}{x}}=800$

b) $\frac{800x}{x+1000}=600 \qquad 800x = 600x + 600000$

$200x = 600000 \qquad x= 3000$

c) Inntektene er $5\cdot Q(x)$. Utgiftene er x. Overskuddet blir

derfor $\pi(x)=5\cdot Q(x)-x=5\cdot\frac{800x}{x+1000}-x=\frac{4000x}{x+1000}-x$

$$\pi'(x) = \frac{4000(x+1000)-4000x}{(x+1000)^2} - 1 = \frac{4000000}{(x+1000)^2} - 1 = 0$$

$(x+1000)^2 = 4000000$ Dette gir $x+1000 = \pm 2000$
Da x ikke kan være negitiv vil kun $x=1000$ være en mulig løsning. Nå er

$$\pi'(x) = 4000000(x+1000)^{-2} - 1$$

Da $\pi''(x) = 4000000(-2)(x+1000)^{-3} - 0 = -\dfrac{8000000}{(x+1000)^3} < 0$ for alle positive x vil derfor x=1000 gi maksimalt overskudd.

Bedriftens maksimale overskudd blir derfor. $\pi(1000) = 1000$

Oppgave 3

a) $\dfrac{x^2+1}{x+3} > 5$ $\dfrac{x^2+1}{x+3} - 5 > 0$ $\dfrac{x^2+1}{x+3} - \dfrac{5(x+3)}{x+3} > 0$

$\dfrac{x^2-5x-14}{x+3} > 0$ For å løse denne ulikheten må vi faktorisere

annengradspolynomet $x^2 - 5x - 14 = 0$.

Løser vi annengradslikningen $x^2 - 5x - 14$ får vi løsningene $x_1 = -2$, $x_2 = 7$.
Vi kan derfor skrive ulikheten som

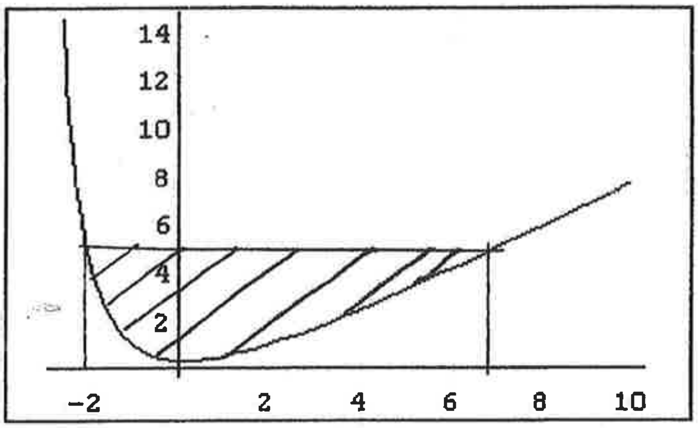
$$\frac{(x+2)(x-7)}{x+3} > 0$$

```
          -3        -2                             7
____________________________________________________________
x+2-----------0_____________________________________________
x-7 ---------------------------------0______________________
x+3 ---x____________________________________________________
    ---x________0-------------------0_______________________
```

Ulikheten er oppfylt når $-3 < x < -2$ eller $x > 7$

b) $\frac{x^2+1}{x+3}=(x^2+1):(x+3)=x-3+\frac{10}{x+3}$

$$\int(x-3+\frac{10}{x+3})\,dx=\frac{1}{2}x^2-3x+10\ln|x+3|+C$$



Fra en skisse av grafen vil vi se at det søkte arealet blir :

$$\int_{-2}^{7}(5-(x-3+\frac{10}{x+3}))\,dx=\int_{-2}^{7}(8-x-\frac{10}{x+3})\,dx=[8x-\frac{1}{2}x^2-10\ln|x+3|]_{-2}^{7}=$$

$$(8\cdot7-\frac{1}{2}\cdot7^2-10\,ln10)-(8\cdot(-2)-\frac{1}{2}\cdot(-2)^2-10\,ln1)=\frac{99}{2}-10\,ln10\approx26.47$$

Oppgave 4

$f(x,y)=20x^{-0.8}y^{1.5}$

a) $f(1,9)=20\cdot1^{-0.8}9^{1.50}=540$

b) Etterspørselen etter varen som funksjon av tiden vil være

$E(t)=f(t,9t)=20t^{-0.8}(9t)^{1.5}=20t^{-0.6}\cdot9^{1.5}t^{1.5}=20\cdot27t^{-0.8+1.5}=540t^{0.7}$

Skal etterspørselen være 1620 må $540t^{0.7}=1620$

Dette gir $t^{0.7}=3$ $\quad$ $t=3^{\frac{1}{0.7}}=4.8$

c) $f'_x(x,y)=20\cdot(-0.8)x^{-1.8}y^{1.5}=-16x^{-1.8}y^{1.5}$

$f'_x(1,9)=-16\cdot 1^{-1.8}\cdot 9^{1.5}=-432$

$f'_y(x,y)=20\cdot x^{-0.8}\cdot 1.5\cdot y^{0.5}=30x^{-0.8}y^{0.5}$

$f'_y(1,9)=30\cdot 1^{-0.8}\cdot 9^{0.5}=90$

Stigningstallet $a=-\frac{-432}{90}=4.8$

Likningen for tangenten blir derfor

$y - 9 = 4.8(x-1)$

$y - 9 = 4.8x - 4.8$

$y = 4.8x + 4.2$

Oppgave 5

a) $f(x,y)=\ln(xy+1)$

$f'_x=\frac{1}{xy+1}\cdot y=\frac{y}{xy+1}$ $\qquad f'_y=\frac{1}{xy+1}\cdot x=\frac{x}{xy+1}$

b) Vi setter inn x= 4 og får.

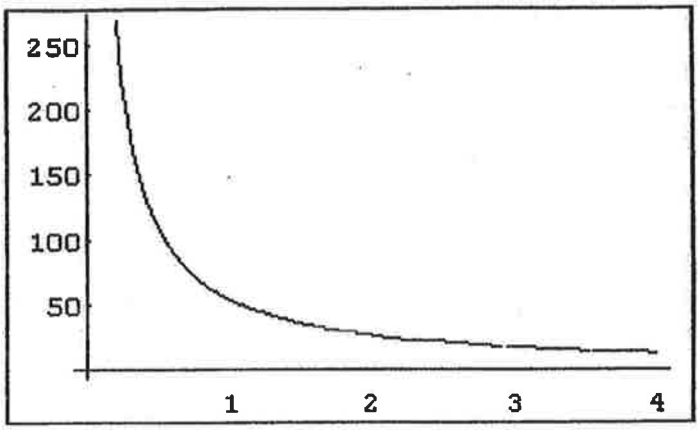
$\ln(4y+1)=4 \qquad 4y+1=e^4 \qquad 4y=e^4-1 \qquad y=\frac{e^4-1}{4}$

c) Likningen for denne nivåkurven er $\ln(xy+1)=4$

Denne kan skrives som $xy+1=e^4 \qquad xy=e^4-1 \qquad y=K\cdot\frac{1}{x}$

Her er K en konstant $K=e^4-1\approx 53.6$

Nivåkurven er skissert nedenfor.



d) $\pi(x,y)=102\cdot\ln(xy+1)-10x-20y$

e) I $\pi'_x=102\cdot\dfrac{y}{xy+1}-10=0$

II $\pi'_y=102\cdot\dfrac{x}{xy+1}-20=0$

Ganger vi likning I med 2 , og sammenlikner med likning II får vi at

$$102\cdot2\frac{y}{xy+1}=102\cdot\frac{x}{xy+1}$$

Herav følger at 2y = x

Settes dette inn i II får vi $102\cdot\dfrac{2y}{2y^2+1}=20$

$204y=20(2y^2+1)$ $\quad 204y=40y^2+20$ $\quad 40y^2-204y+20=0$

Løser vi denne annengradslikningen finner vi at

y = 0.1 eller y= 5

Er y = 0.1 så er x = 2(0.1) = 0.2

Er y = 5 så er x = 10.

Funksjonen har to stasjonære punkter (0.2,0.1) og (10,5)

$$A=\Pi'_{xx}=102\,\frac{0-y\cdot y}{(xy+1)^2}=-102\,\frac{y^2}{(xy+1)^2}$$

$$B=\Pi'_{xy}=102\,\frac{1\cdot(xy+1)-y\cdot x}{(xy+1)^2}=\frac{102}{(xy+1)^2}$$

$$C=\Pi'_{yy}=102\,\frac{0-x\cdot x}{(xy+1)^2}=-102\,\frac{x^2}{(xy+1)^2}$$

	A	B	C	$AB-C^2$	
(0.2,0.1)	-0.9804	98.0392	-3.9216	-9608	Sadel
(10, 5)	-0.9804	0.0392	-3.9216	3.8432	Lok maks

f) For å få størst overskudd må bedriften bruke 10 enheter av x og 5 enheter av y.
$\Pi(10,5)=102\cdot\ln(10\cdot5+1)-10\cdot10-20\cdot5=201.05$

g) $F(x,y)=\ln(xy+1)-\lambda(10x+20y-160)$

I $\quad F'_x=\dfrac{y}{xy+1}-10\lambda=0 \qquad$ II $\quad F'_y=\dfrac{x}{xy+1}-20\lambda=0$

Av I og II følger at $2y = x$

Settes dette inn i bibetingelsen $10x + 20y = 160$ får vi

$10(2y) + 20y = 160 \qquad 40y = 160 \qquad y = 4 \qquad x=8$

BI Stiftelsen
Handelshøyskolen BI
Institutt for økonomi

LF

Skriftlig eksamen i: SIV 1000.01 Matematikk

Studium: Siviløkonomstudiet.

Eksamensdato: 11.06.96, kl. 09-14

Tillatte hjelpemidler: Alle
Antall sider: 3
Innføringsark: Ruteark

NB! Alle utregninger skal begrunnes.

Oppgave 1

a) Løs likningen $\sqrt{2x}+3x-28=0$

b) Løs likningen $\dfrac{1}{1-\ln x}=3$

c) Skraver definisjonsområdet til funksjonen

$$f(x,y)=\sqrt{(x-1)(y-1)}+\sqrt{x^2+y^2-4}$$

Oppgave 2

La P(t) være verdien av en vareparti ved tidspunktet t.
Anta at $P(t)=t^2+30t+750$. Med en kontinuerlig rente på 4% per år vil **nåverdien** av dette varepartiet være
$f(t)=(t^2+30t+750)e^{-0.04t}$ Her er $t\geq 0$
På hvilket tidspunkt bør man selge varepartiet dersom man ønsker å maksimere nåverdien ?

Oppgave 3

En bedrift produserer to artikler A og B. Dersom de produserer og selger x enheter av A og y enheter av B, vil fortjenesten være

$f(x,y) = \ln x + 2\ln y \qquad x > 0$ og $y > 0$

a) En nivålinje for $f(x,y)$ går gjennom punktet (2,2). Finn stigningstallet for tangenten i dette punktet.

Bedriften har fysiske produksjonsbeskrankninger slik at

$x^2 + 4y = 125$

b) Bruk Lagranges metode til å bestemme x og y slik at fortjenesten blir størst mulig.

Oppgave 4 (utgår)

Oppgave 5

En bedrift produserer en vare der etterspørselen er gitt ved

$E(p,y) = (100 - p)(1 - e^{-0.01y}) \qquad p > 0$ og $y > 0$

Her er p pris per enhet, og y er de totale utgifter til markedsføring.

a) Hvor stor blir etterspørselen dersom prisen er 30, og utgifter til markedsføring er 100 ?

b) Hva nærmer etterspørselen seg mot dersom prisen er 30,og utgiftene til markedsføring går mot uendelig?

c) Anta at produksjonskostnadene per enhet er 20. (Vi skal her regne med at bedriften ikke har faste kostnader). Vis at overskuddsfunksjonen blir

$$f(p,y) = (-p^2 + 120p - 2000)(1 - e^{-0.01y}) - y$$

d) Bestem pris og utgifter til markedsføring slik at overskuddet blir maksimalt. Hvor stort blir overskuddet ?

Oppgave 6

Gitt matrisen $A = \begin{pmatrix} a & 2 & a \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & a & a \end{pmatrix}$

a) For hvilke verdier av a vil den inverse matrisen, A^{-1} eksistere?

b) Finn A^{-1} når a=1

c) Bruk resultatet fra b) til å løse likningssettet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$$

Sensorveiledning. SIV 1000, gitt 11.06.96

Oppgave 1

a) $\sqrt{2x}+3x-28=0$ $\quad\sqrt{2x}=28-3x$ $\quad 2x=(28-3x)^2$

$2x=784-168x+9x^2$ $\quad 9x^2-170x+784=0$

$$x=\frac{170\pm\sqrt{170^2-4\cdot 9\cdot 784}}{2\cdot 9}=\frac{170\pm 26}{18} \qquad x=\frac{98}{9} \text{ eller } x=8$$

Setter vi prøve ser vi at kun $x=8$ passer.

b) $\dfrac{1}{1-\ln x}=3$ $\quad 1=3-3\ln x$ $\quad 3\ln x=2$

$\ln x=\dfrac{2}{3}$ $\quad x=e^{\frac{2}{3}}\approx 1.9477$

c) $f(x,y)=\sqrt{(x-1)(y-1)}+\sqrt{x^2+y^2-4}$

Skal funksjonen være definert må

$(x-1)(y-1)\geq 0$ og $x^2+y^2-4\geq 0$

Skal $(x-1)(y-1)\geq 0$ må enten begge faktorene være mindre eller lik null, eller så må begge faktorene være større eller lik null. Det vil si:
($x\leq 1$ og $y\leq 1$) eller ($x\geq 1$ og $y\geq 1$)

Skal $x^2+y^2-4\geq 0$ må $x^2+y^2\geq 2^2$ Det vi si punktene må ligge på eller utenfor en sirkel med radius r=2.

Definisjonsområdet er skravert på fig 1.

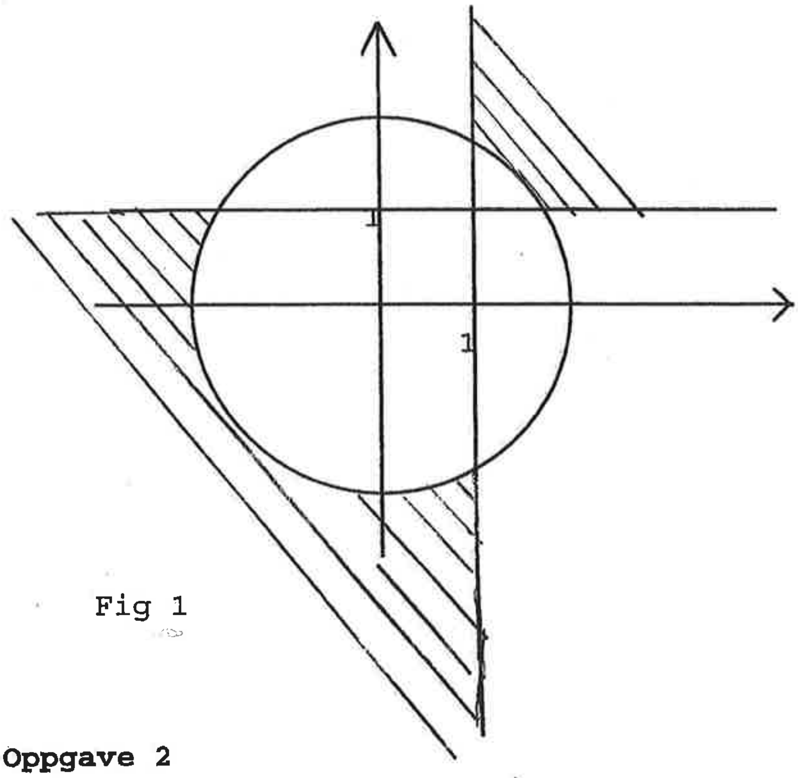


Fig 1

Oppgave 2

a) $f(t) = (t^2 + 30t + 750)e^{-0.04t}$

$$f'(t) = (2t + 30)e^{-0.04t} + (t^2 + 30t + 750)e^{-0.04t}(-0.04) =$$

$$(2t + 30 - 0.04t^2 - 1.2t - 30)e^{-0.04t} =$$

$$-0.04t^2 + 0.8t)e^{-0.04t} = t(-0.04t + 0.8)e^{-0.04t}$$

	0		20	
t	0	————	————	————
-0.04t+0.8		————	0	- - - - - -
$e^{-0.04t}$		————	————	————
$f'(t)$		————	0	- - - - - -

Svar: Det vil lønne seg å selge varepartiet etter 20 år.

Oppgave 3

$f(x,y) = \ln x + 2\ln y$

a) $y' = -\dfrac{f'_x}{f'_y} = -\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{2}{y}} = -\dfrac{y}{2x}$

I punktet (2,2) blir derfor stigningstallet

$a = -\dfrac{2}{2 \cdot 2} = -\dfrac{1}{2}$

b) $L(x,y) = \ln x + 2\ln y - \lambda(x^2 + 4y - 125)$

I $\quad L'_x = \dfrac{1}{x} - 2x\lambda = 0 \qquad$ II $\quad L'_y = \dfrac{2}{y} - 4\lambda = 0$

Ganger vi likning I med 2, og likning II med x får vi.

$\dfrac{2}{x} - 4x\lambda = 0$ og $\dfrac{2x}{y} - 4x\lambda = 0$ Dette gir $\dfrac{2}{x} = \dfrac{2x}{y} \qquad y = x^2$

Setter vi dette inn i bibetingelsen får vi

$x^2 + 4x^2 = 125 \qquad 5x^2 = 125 \qquad x^2 = 25 \qquad x = 5$

$y = 5^2 = 25$. Studerer vi bibetingelsen ser vi at:

dersom $x \to 0^+$ vil $y \to \dfrac{125}{4}$

I dette tilfellet vil $f(x,y) = \ln x + 2\ln y \quad \to -\infty$

Lar vi $y \to 0^+$ vil $x \to \sqrt{125}$

Også i dette tilfellet vil $f(x,y) = \ln x + 2\ln y \quad \to -\infty$

(5,25) er derfor et globalt maksimumspunkt.

Oppgave 4

Oppgave 5

a) $E(30{,}100)=(100-30)(1-e^{-1})=44.25$

b) $E(30,y)=70(1-\frac{1}{e^{0.01y}})$. Dersom y går mot uendelig vil $e^{0.01y}$ gå mot uendelig, og dermed etterspørselen mot 70.

c) $f(p,y)=pE-20E-y=(p-20)E-y=$
$(p-20)(100-p)(1-e^{-0.01y})=(-p^2+120p-2000)(1-e^{-0.01y})-y$

d) I $\quad f'_p=(-2p+120)(1-e^{-0.01y})=0$
II $\quad f'_y=(-p^2+120p-2000)(-e^{-0.01y})(-0.01)-1=0$

Fra likning I får vi -2p+120=0 dvs. p=60

Setter vi dette inn i II får vi

$$(-60^2+120\cdot 60-2000)(-0.01)(-e^{-0.01y)})-1=0$$

$16e^{-0.01y}=1 \qquad \frac{16}{e^{0.01y}}=1 \qquad e^{0.01y}=16$

$0.01y=\ln(16) \qquad y=100\ln(16)\approx 277.26$

Overskuddet blir $f(60{,}277.26)=1600(1-\frac{1}{16})-277.26=1222.74$

Oppgave 6

a) Skal den inverse matrisen eksistere må determinanten til A være forskjellig fra 0.

Nå er $|A|=\begin{vmatrix} a & 2 & a \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & a & a \end{vmatrix}=a^2+8+3a^2-2a^2-6a-2a=2a^2-8a+8$

$2a^2-8a+8=0$ har løsningen a=2
Den inverse matrisen eksisterer dersom $a\neq 2$

b) Dersom $a = 1$ blir $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$|A| = 2 \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{adj} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A_{Adj} = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.5 & 1.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 & -2.5 \end{pmatrix}$$

c) Løsningen av likningssetter er :

$$\begin{pmatrix} -0.5 & -0.5 & 1.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 & -2.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

BI Stiftelsen
Handelshøyskolen BI
Institutt for økonomi

LF

Skriftlig eksamen i: SIV 1000.01 Matematikk

Studium: Siviløkonomstudiet.

Eksamensdato: 05.09.96, kl. 09-14

Tillatte hjelpemidler: Alle
Antall sider: 3
Innføringsark: Ruteark

NB! Alle utregninger skal begrunnes.

Oppgave 1

a) Faktoriser polynomet $3x^2 - 7x + 2$

b) Løs likningen $\frac{2}{x} + \frac{2x}{x-1} = 5$

c) Løs ulikheten $\frac{2}{x} + \frac{2x}{x-1} \geq 5$

d) Løs likningen $(k-1)p = Ap + t(3-p)$ med hensyn på p

Oppgave 2

a) Beregn integralet $\int \frac{x^2}{x+1} dx$

b) Beregn integralet $\int_0^1 x \ln(x+1) dx$

c) Tegn opp grafene til funksjonene $f(x) = x^2 + 3$ og $g(x) = 4x$ i samme koordinatsystem. Hvor stort er arealet begrenset av de to grafene?

d) For hvilke vedier av k er den rette linjen y = kx tangent til grafen til $f(x)$

Oppgave 3

Gitt tre matriser A ,B og C

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Beregn AB

b) Beregn $D = A - B$ og D^{-1}

c) Finn en matrise X , slik at $BX = AX + C$

Oppgave 4

En bedrift produserer en vare. Antall enheter z som produseres er avhengig av to innsatsfaktorer x og y.

$$z = f(x,y) = x^{0.4}y^{0.6}$$

Pris pr enhet for hhv innsatsfaktor x og y er 2 og 6.

Bedriften benytter for tiden 32 enheter av innsatsfaktor y. På kort sikt har ikke bedriften mulighet til å endre på bruken av denne innsatsfaktoren.

a) Hvor stor er produksjonen dersom bedriften benytter 1024 enheter av innsatsfaktor x og 32 enheter av innsatsfaktor y?

b) Hvor mye må bedriften benytte av innsatsfaktor x dersom den ønsker å produsere 32 enheter av varen? (Husk y=32) Hvor store blir de totale kostnadene?

c) Anta at bedriften ønsker å produsere q enheter av varen. Vis at de totale kostnadene er

$$C(q) = 2\left(\frac{q}{8}\right)^{2.5} + 192 \qquad \text{(Husk y=32)}$$

Beregn grensekostnaden $C'(q)$. Anta at produksjonen er 32 enheter. Hvor mye koster det tilnærmet å øke produksjonen med en enhet?

Vi skal heretter anta at bedriften fritt kan velge hvor mye den ønsker å benytte av hhv innsatsfaktor x og y.

d) Anta nå at bedriften kun kan benytte totalt 200 til innkjøp av innsatsfaktorene x og y. Hvor mange enheter av hver innsatsfaktor bør bedriften benytte dersom den ønsker og maksimere produksjonen? Hvor stor blir produksjonen?

e) Anta at bedriften ønsker å produsere 32 enheter av varen. Hvor mye bør den da benytte av hhv innsatsfaktor x og y dersom den ønsker å minimere kostnaden?

Oppgave 1

a) $3x^2 - 7x + 2 = 0$ $x = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{6}$ $x = \frac{1}{3}$ eller $x = 2$

$3x^2 - 7x + 2 = 3(x - \frac{1}{3})(x-2)$

b) $\frac{2}{x} + \frac{2x}{x-1} = 5$ ganger vi på begge sider av denne likningen med $x(x-1)$ får vi.

$2(x-1) + 2x^2 = 5x(x-1)$ $2x - 2 + 2x^2 = 5x^2 - 5x$

$3x^2 - 7x + 2 = 0$ Fra a) ser vi at løsningen blir

$x = \frac{1}{3}$ eller $x = 2$

c) $\frac{2}{x} + \frac{2x}{x-1} \geq 5$ $\frac{2}{x} + \frac{2x}{x-1} - 5 \geq 0$ Felles nevner er $x(x-1)$

Denne ulikheten kan vi skrive som.

$$\frac{2(x-1) + 2x^2 - 5x(x-1)}{x(x-1)} \geq 0$$

Ganger vi ut og trekker sammen får vi

$$\frac{-3x^2 + 7x - 2}{x(x-1)}$$

Annengradslikningen $-3x^2 + 7x - 2 = 0$ har løsningene

$x = \frac{1}{3}$ og $x = 2$. (Se a)) Vi har derfor

$-3x^2 + 7x - 2 = -3(x - \frac{1}{3})(x-2)$

Vi kan derfor skrive ulikheten som

$$\frac{-3(x-\frac{1}{3})(x-2)}{x(x-1)} \geq 0$$

	$x<0$	0		$\frac{1}{3}$		1		2	
-3	−	−	−	−	−	−	−	−	−
$(x-\frac{1}{3})$	−	−	−	0	+	+	+	+	+
$x-2$	−	−	−	−	−	−	−	0	+
x	−	x	+	+	+	+	+	+	+
$x-1$	−	−	−	−	−	x	+	+	+
Brøk	−	x	+	0	−	x	+	0	−

Ulikheten er oppfylt når $0 < x \leq \frac{1}{3}$ eller $1 < x \leq 2$

d) $(k-1)p = Ap + t(3-p)$ $\qquad$ $(k-1)p = Ap + 3t - tp$

$(k-1)p - Ap + tp = 3t$ $\qquad$ $p = \dfrac{3t}{k+t-A-1}$

Oppgave 2

a) $\int \frac{x^2}{x+1}dx$ Foretar vi polynomdivisjonen $\frac{x^2}{x+1} = x^2:(x+1)$

finner vi at $\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$

Derfor vil $\int \frac{x^2}{x+1}dx = \int (x - 1 + \frac{1}{x+1})dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) + C$

b) $\int x\ln(x+1)dx$ vi benytter delvis integrasjon.

$u' = x$ og v=ln(x+1) Dette gir $u = \frac{1}{2}x^2$ $\qquad v = \frac{1}{x+1}$

Setter vi dette inn i formelen $\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx$

får vi $\int x\ln(x+1)dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x+1) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x+1}dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x+1}dx$

Integralet $\int \frac{x^2}{x+1}dx$ har vi løst under c)

Setter vi inn dette finner vi

$$\int x\ln(x+1)dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x+1) - \frac{1}{2}(\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)) + C =$$

$$\frac{1}{2}x^2\ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln(x+1) + C$$

$$\int_0^1 x\ln(x+1)dx = \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln(x+1)\right]_0^1 = (\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2) = \frac{1}{4}$$

c)

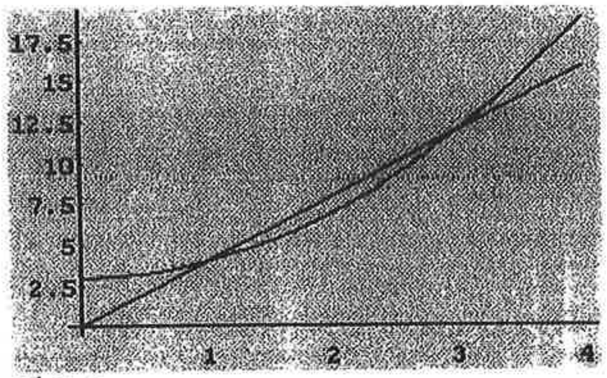


Fig 1

Vi finner skjæringspunktene mellom kurvene ved å løse likningen f(x)=g(x) Det vil si $x^2 + 3 = 4x$

$x^2 - 4x + 3 = 0$ Denne har løsningene x=1 eller x=3

Da $g(x) \geq f(x)$ når $1 \leq x \leq 3$ se Fig 1 blir det søkte arealet

$$A = \int_1^3 (4x - (x^2+3))dx = \int_1^3 (-x^2+4x-3)dx =$$

$$\left[-\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} - 3x\right]_1^3 = (-\frac{3^3}{3} + 2\cdot 3^2 - 3\cdot 3) - (-\frac{1}{3} + 2\cdot 1 - 3\cdot 1) = \frac{4}{3}$$

d)

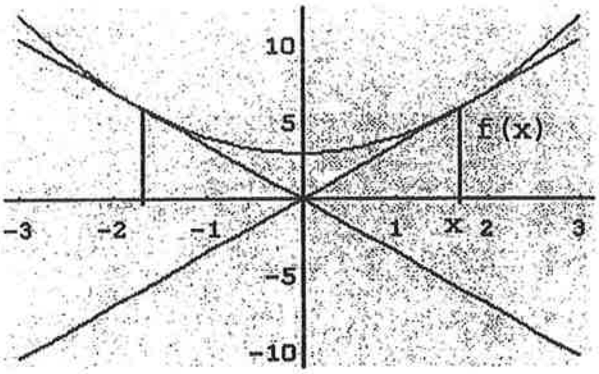


Fig 1

Fra figuren ser vi at $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x^2+3}{x} = k = f'(x) = 2x$

$x^2 + 3 = 2x^2$ $\qquad$ $x^2 = 3$ $\qquad$ $x = -\sqrt{3}$ eller $x = \sqrt{3}$

Er $x = -\sqrt{3}$ $\qquad$ blir $k = 2(-\sqrt{3}) = -2\sqrt{3}$

Er $x = \sqrt{3}$ $\qquad$ blir $k = 2\sqrt{3}$

Oppgave 3

a) $$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 10 \\ 13 & 15 & 14 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

b) $$D = A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2+2+4+4=8$$

$$D' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad D_{adj} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -5 & 1 & -6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \frac{1}{|A|} D_{adj} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -5 & 1 & -6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 & -1/2 \\ -5/4 & 1/8 & -3/4 \\ 3/8 & 1/8 & 1/4 \end{pmatrix}$$

c) $BX = AX + C \qquad AX + C = BX \qquad AX - BX = -C$

$(A-B)X = -C \qquad DX = -C$

$$X = -D^{-1}C = (-1)\begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 & -1/2 \\ -5/4 & 1/8 & -3/4 \\ 3/8 & 1/8 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/4 \\ 21/8 \\ -11/8 \end{pmatrix}$$

Oppgave 4

a) $f(x,y) = x^{0.4}y^{0.6} \qquad f(1024,32) = 1024^{0.4}\cdot 32^{0.6} = 128$

b) $f(x,32) = x^{0.4}32^{0.6} = 8x^{0.4} = 32$ Fra denne likningen får vi

$x^{0.4} = 4$ Dette gir $x = 4^{\frac{1}{0.4}} = 4^{2.5} = 32$
Totale kostnader $32\cdot 2 + 32\cdot 6 = 256$

c) Ønsker bedriften å produsere q enheter av varen må
$8x^{0.4} = q$ Fra denne likningen får vi

$$x^{0.4} = \frac{q}{8} \qquad x = \left(\frac{q}{8}\right)^{\frac{1}{0.4}} = \left(\frac{q}{8}\right)^{2.5}$$

De totale kostnadene til innkjøp av innsatsfaktorene x og y blir derfor $2x+6y=2\cdot\left(\frac{q}{8}\right)^{2.5}+6\cdot 32=2\cdot\left(\frac{q}{8}\right)^{2.5}+192$

$$C'(q)=5\cdot\left(\frac{q}{8}\right)^{1.5}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{5}{8}\cdot\left(\frac{q}{8}\right)^{1.5} \qquad C'(32)=\frac{5}{8}\cdot\left(\frac{32}{8}\right)^{1.5}=5$$

d) Kan bedriften kun benytte 200 til innkjøp av innsatsfaktorene x og y må 2x+6y = 200.
Setter vi opp lagrangefunksjonen får vi

$$L(x,y)=x^{0.4}y^{0.6}-\lambda(2x+6y-200)$$

I $\quad L'_x=0.4x^{-0.6}y^{0.6}-2\lambda=0 \qquad$ II $\quad L'_y=0.6x^{0.4}y^{-0.4}-6\lambda=0$

Ganger vi likning I med 3 får vi
$1.2x^{-0.6}y^{0.6}=6\lambda$ fra likning II får vi $0.6x^{0.4}y^{-0.4}=6\lambda$
Herav følger $1.2x^{-0.6}y^{0.6}=0.6x^{0.4}y^{-0.4}$ Ganger vi på begge sider av denne likningen med $x^{0.6}y^{0.4}$ får vi $1.2y=0.6x$
Det vil si $y=\frac{1}{2}x$ Setter vi dette inn i bibetingelsen

$2x+6y=200$ får vi $2x+3x=5x=200$ $\quad x=40$ og $y=20$

Produksjon blir $f(40,20)=26.3902$

e) Skal bedriften produsere 32 enheter av varen må $f(x,y)=x^{0.4}y^{0.6}=32$ Dette blir bibetingelsen.
Vi ønsker å minimere kostnadene. Disse er 2x+6y
Lagrangefunksjonen blir derfor

$$L(x,y)=2x+6y-\lambda(x^{0.4}y^{0.6}-32)$$

I $\quad L'_x=2-0.4x^{-0.6}y^{0.6}\lambda=0 \qquad$ II $\quad 6-0.6x^{0.4}y^{-0.4}\lambda=0$

Fra I finner vi $\quad 0.4x^{-0.6}y^{0.6}\lambda=2$

Fra II finner vi $\quad 0.6x^{0.4}y^{-0.4}\lambda=6$

Da λ ikke kan være 0 kan vi dividere disse likningene på

hverandre og får $\dfrac{0.4x^{-0.6}y^{0.6}\lambda}{0.6x^{0.4}y^{-0.4}\lambda}=\dfrac{2}{6}$ $\quad \dfrac{4y}{6x}=\dfrac{2}{6}$ Dette gir

$y = \frac{1}{2}x$ Setter vi dette inn i bibetingelsen $x^{0.4}y^{0.6} = 32$

finner vi $x^{0.4}(\frac{1}{2}x)^{0.6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{0.6} x = 32$ Dette gir

$x = 2^{0.6} \cdot 32 = 48.5029$ $y = \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}48.5029 = 24.2515$

BI Stiftelsen
Handelshøyskolen BI
Institutt for økonomi

F

Skriftlig eksamen i: SIV 1000.01 Matematikk

Studium: Siviløkonomstudiet.

Eksamensdato: 13.06.97, kl. 09-14

Tillatte hjelpemidler: Alle
Antall sider: 3
Innføringsark: Rutark

NB! Alle utregninger skal begrunnes.

Oppgave 1

a) Deriver funksjonen $f(x) = \dfrac{e^{3x}}{x}$

For hvilken verdi av x er $f'(x) = 0$

b) Vis at x=1 er en løsning av likningen $x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0$
Finn alle løsninger av likningen.

c) Løs likningen $\sqrt{\dfrac{15x-20}{x-2} - 4} = x$

Oppgave 2

Beregn følgende integraler.

a) $\displaystyle\int \frac{2x+7}{x^2 - 5x + 4}\,dx$

b) $\displaystyle\int x^2 e^{x^3}\,dx$

Oppgave 3

Gitt funksjonen $f(x) = x^2 \ln x \qquad x > 0$

a) f(x) vil ha et minimumspunkt. Finn dette punktet og forklar at det er et globalt minimumspunkt. Beregn minimumsverdien.

b) Beregn $\int_1^2 f(x)dx$

Oppgave 4

En bedrift har kostnadsfunksjonen $C(x) = x^3 - 30x^2 + 500x + 700$
$x \geq 0$

a) For hvilke verdier av x er grensekostnaden 500?

b) For hvilken verdi av x blir grensekostnaden minimal og hvor stor blir den?

c) Vis at $C(x)$ er en voksende funksjon.

d) Vi skal nå anta at kostnadsfunksjonen er
$C(x) = ax^3 - 30x^2 + 500x + 700$, $x \geq 0$ Her er a en positiv konstant.
For hvilken verdi av x er grensekostnaden minimal, og hvor stor blir den?
For hvilke verdier av a er C(x) en voksende funksjon.

Oppgave 5

Løs likningssettet

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 19 \\ x_1 \qquad + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 \qquad &= 5 \end{aligned}$$

ved hjelp av matriseinversjon.

La A være koeffisient matrisen til likningssystemet ovenfor.

Finn en matrise Y slik at YA= B der B=(1,2,3)

Oppgave 6

Anta at antall produserte enheter er gitt ved funksjonen $f(x,y) = 0.3\ln x + 0.6\ln y$. Her er x og y innsatsfaktorer.

a) Hvor stor er produksjonen dersom $x = 20$ og $y = 10$

b) Vi øker innsatsfaktoren x til 21. Hvilken verdi må y ha dersom produksjonen skal være uforandret?

c) Finn stigningstallet til tangenten til grafen i punktet (20,10)? Sammenlign med svaret i b)

d) Løs likningen $f(x,y) = f(20,10)$ med hensyn på y og vis at svaret kan skrives på formen $y = \sqrt{\frac{2000}{x}}$

Benytt dette til å finne y'. Hva blir y'(20)? Sammenlign med svaret i c)

1 a) $f'(x)=\frac{e^{3x}(3x-1)}{x^2}$ $x=\frac{1}{3}$

b) $x=1$ eller $x=-3$ eller $x=4$

c) $x=1$ *og* $x=4$ passer.

2 a) $-3\ln|x-1|+5\ln|x-4|+C$

b) $\frac{1}{3}e^{x^3}+C$

3 a) $x=e^{-\frac{1}{2}}$ $f(e^{-\frac{1}{2}})=-\frac{1}{2e}\approx-0.1839$

b) $\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{9}\approx 1.0706$

4 a) $x=0$ eller $x=20$

b) x=10. $C'(10)=200$

d) $x=\frac{10}{a}$ er et minimumspunkt for grensekostnaden

$C'(\frac{10}{a})=500-\frac{300}{a}$

$a\geq\frac{3}{5}$

5 $X=\begin{pmatrix}5\\0\\-1\end{pmatrix}$ $Y=(-4,7,10)$

6 a) $f(20,10)=2.2803$

b) $y=e^{2.2782}=9.7590$ Reduksjonen i y blir på 0.2410

c) Vi ser at $y'_{(20,10)}=-0.25$ tilnærmet er reduksjonen i y i svar b)

d) $y'(20)=-0.25$

BI Stiftelsen
Handelshøyskolen BI
Institutt for økonomi

Skriftlig eksamen i:	SIV 1000.01 Matematikk
Studium:	Siviløkonomstudiet.
Eksamensdato:	22.08.97, kl. 09-14
Tillatte hjelpemidler:	Alle
Antall sider:	3
Innføringsark:	Ruteark

NB! Alle utregninger skal begrunnes.

Oppgave 1

a) Løs likningen $\sqrt{x+2}-3+x=7$

b) Løs ulikheten $\dfrac{-x^2+5x+2}{x-1}\geq 4$

c) Løs likningen $e^{3x}=5e^{x+2}$

Oppgave 2

a) Finn de stasjonære punktene til funksjonen
$f(x,y)=x^4+y^2-4x^2y+6y$

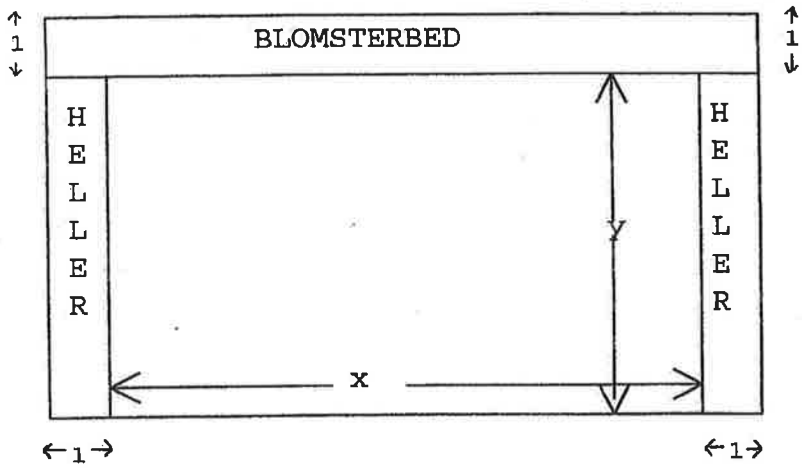
b) Klassifiser de stasjonære punktene.

c) Vi skal nå anta at $f(x,y)$ er definert i området gitt ved
$-1\leq x\leq 1$ $-4\leq y\leq 0$. Finn de globale ekstrempunktene i dette området.

d) Gjennom punktet (1,1) går det en nivålinje. Finn likningen for tangenten til nivålinjen i dette punktet.

Oppgave 3

Det skal anlegges en rektangulær plen med bredde x meter og lengde y meter. På hver side av plenen skal det være en 1 meter bred hellegang. Foran plenen skal det være et blomsterbed, også dette skal ha en bredde på en meter.
(Se figur på neste side.)



Anleggskostnader er $10\,kr/m^2$ for plenen, $20\,kr/m^2$ for hellene og $80\,kr/m^2$ for bedet.

a) Vis at de totale kostnadene blir
$10xy + 80(x+2) + 40y$

b) Man ønsker å velge x og y slik at arealet av gressplenen skal bli størst mulig. Anta at man har 3760 kr til disposisjon. Vis at dette fører til optimeringsproblemet max $f(x,y) = xy$ under bibetingelsen $g(x,y) = 10xy + 80x + 40y = 3600$

c) Finn x og y. Hvor stort blir det maksimale arealet av gressplenen.

Oppgave 4

Gitt likningssettet

$$\begin{aligned} (a-1)x_2 + (a+1)x_3 &= 2 \\ x_1 + (a+1)x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + (a-1)x_3 &= 1 \end{aligned}$$

a) Løs likningssettet når $a = 1$. Benytt matriseinversjon.

b) For hvilke verdier av a har likningssettet en løsning der $x_1 = -\frac{1}{3}$?

c) Vis at likningssetet har løsning for alle verdier av a

Oppgave 5

a) Løs integralet $\int_1^4 \frac{1}{x(x+1)}dx$

b) Løs integralet $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}dx$

1 a) $x = 7$

b) $x \le -2$ eller når $1 < x \le 3$

c) $x = \dfrac{\ln 5}{2} + 1 \approx 1.8047$

2 a) $(0,-3)$ $(-\sqrt{2},1)$ $(\sqrt{2},1)$

b) $(0,-3)$ lokalt min , $(-\sqrt{2},1)$ sadel , $(\sqrt{2},1)$ sadel

c) $(0,-3)$ er et globalt minimumspunkt med minimumsverdi -9

$(-1,-4)$ og $(1,-4)$ er globale maksimumspunkter med maksimumsverdi 9

d) $y = x$

3 c) $x = 10$ $y = 20$ Maksimalt areal av plenen $x \cdot y = 200m^2$

4 a) $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $a = \dfrac{5}{4}$ eller $a = 2$

5 a) $\ln(\frac{8}{5}) \approx 0.47$

b) $2\ln(\frac{3}{2}) \approx 0.8109$

BI Stiftelsen
Handelshøyskolen BI
Institutt for økonomi

F

Skriftlig eksamen i: SIV 1000.01 Matematikk

Studium: Siviløkonomstudiet.

Eksamensdato: 09.06.98, kl. 09-14

Tillatte hjelpemidler: Alle
Antall sider: 3
Innføringsark: Ruteark

NB! Alle utregninger skal begrunnes.

Oppgave 1

Et stort varemagasin benytter olje til oppvarming.
La $Q(t)$ være det totale oljeforbruket fra tidspunkt 0 fram til tidspunktet t. Tiden t er målt i år.
Varemagasinet regner med at forbruket av olje per tidsenhet er gitt ved funksjonen:

$$Q'(t) = 10e^{0,1t} \qquad t \geq 0$$

a) Beregn $Q'(0)$, $Q'(1)$, $Q'(5)$ og $Q'(10)$

Skisser grafen til $Q'(t)$ for $0 \leq t \leq 10$
La 1 cm på 1.-aksen svare til 1 år og 1 cm på 2.-aksen svare til 2 enheter.
Finn en tilnærmet verdi for oljeforbruket den første dagen.

b) Benytt integrasjon til å finne $Q(t)$.
Vi vet at $Q(0) = 0$.

c) Hvor stort er det totale oljeforbruket de 5 første årene?
Hvor stort er det totale oljeforbruket de 10 første årene?

d) Vi skal nå anta at oljeforbruket per tidsenhet kan uttrykkes ved:

$f(t) = 1{,}718t + 10 \qquad t \geq 0$

Tegn inn denne rette linjen i det samme koordinatsystemet som du benyttet i a)
Hvor stort er nå det totale oljeforbruket de 10 første årene?

Oppgave 2

Gitt matrisene

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 20 \\ 11 \\ 17 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & a & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

a) Løs likningssystemet $AX = B$ ved hjelp av matrise invertering.

b) For hvilke verdier av a har likningen

$AX - B = CX$ en løsning

Oppgave 3

En bedrift benytter kapital K og arbeidskraft L, som innsatsfaktorer. Antall produserte enheter er gitt ved

$f(K,L) = 10K^{0,7}L^{0,3}$

Kostnadsfunksjonen er $C(K,L) = 6K + 0{,}3L$

a) Anta at L=1024. For hvilken verdi av K er produksjonen 640?

b) Hva blir maksimal produksjon dersom kostnadene er 300?

c) Ved denne produksjonen har bedriften 20% fortjeneste. Dersom den selger alt den produserer hva er da prisen p per enhet av den produserte varen?

Oppgave 4

La funksjonen $f(x,y)$ være gitt ved $f(x,y)=3x^2-6x^2y+2y^3$

a) Punktet $(1,2)$ ligger på nivålinjen $f(x,y)=7$.
Finn tangenten til nivålinjen i dette punktet.

b) Finn de stasjonære punktene.
Bruk annenderivert-testen og prøv å klassifisere dem.

c) Vi skal nå anta at $f(x,y)$ er definert i området gitt ved $x^2+(y-1)^2 \le 1$. Skraver definisjonsområdet i xy- planet.
Finn de globale ekstrempunktene og ekstremverdiene i dette området. (Hint: Bruk innsetningsmetoden)

Oppgave 5

En bestemt dyreart lever i to adskilte områder A og B.
I området A utvikler antallet seg etter funksjonen

$$a(t)=2000e^{0,04t} \qquad t\ge 0 \qquad (t \text{ er antall år})$$

a) Hvor lang tid tar det før antallet er fordoblet?

Ved tidspunktet t=0 bryter det ut en epidemi i området B.
Antallet her utvikler seg heretter ifølge funksjonen

$$b(t)=2000e^{0,04t-0,1\sqrt{t}} \qquad t\ge 0$$

b) Bestem $b'(t)$

c) Antallet i B vil ha et minimum. Når skjer det?

d) Når vil antallet i B være fordoblet?

Fasit til Siv 1000 MATEMATIKK 09.06.98

1 a) $Q'(0)=10 \quad Q'(1)=11.05 \quad Q'(5)=16.49 \quad Q'(10)=27.18$
Oljeforbruket den første dagen er tilnærmet

$$Q'(0)\cdot\frac{1}{365}=\frac{10}{365}=0.0274$$

b) $Q(t)=100e^{0.1t}-100$

c) $Q(5)=100e^{0.1\cdot 5}-100=64.87 \qquad Q(10)=100e^{0.1\cdot 10}-100=171.83$

d) 185.9

2 a) $X=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$

b) $a\neq -2.5$

3 a) $K=8^{\frac{1}{0.7}}=19.50$

b) $K=35 \qquad L=300 \qquad f(35,300)=666.7822$

c) $p=0.54$

4 a) $y=x+1$

b) $(0,0)$ Ingen avgjørelse, $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ Sadelpunkt,
$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ Sadelpunkt

c) $(\pm1,1) \qquad f(\pm1,1)=-1 \qquad$ globalt minimum

$(0,2) \qquad f(0,2)=16 \qquad$ globalt maksimum

5 a) $t=\dfrac{\ln 2}{0.04}\approx 17.33$ b) $b'(t)=2000e^{0.04t-0.1\sqrt{t}}(0.04-0.1\dfrac{1}{2\sqrt{t}})$

c) Antallet har et minimum når t=1.5625

d) $t=x^2=5.5964^2=31.32$

BI Stiftelsen
Handelshøyskolen BI
Institutt for samfunnsøkonomi LF

Skriftlig eksamen i: SIV 1000.01 Matematikk

Studium: Siviløkonomstudiet.

Eksamensdato: 20.08.98, kl. 09-14

Tillatte hjelpemidler: Alle
Antall sider: 3
Innføringsark: Ruteark

NB! Alle utregninger skal begrunnes.

Oppgave 1

a) Løs likningen $\frac{4}{x^2}+\frac{12}{x}-40=0$

b) Løs ulikheten $\frac{x-5}{x}-\frac{2x}{x+5}+1>0$

c) Per investerer 1000 kr i et prosjekt til 6% rente per år.
Hvor lang tid tar det før det innestående beløp er 3000 kr?

d) Kari investerer på samme tidspunkt som Per 1000 kr i et prosjekt til 3% rente per år.
Hvor lang tid tar det før Per har 3 ganger så stort innestående beløp som Kari?

Oppgave 2

Gitt funksjonen $f(x,y)=x^3y+x^2y^2-x^2y$

a) Finn de partielle deriverte av 1. og 2. orden.

b) Finn de stasjonære punktene.
(Hint: Faktoriser de partielle deriverte)
Bruk annenderivert-testen og prøv å klassifisere de stasjonære punktene.

c) Vi skal nå anta at funksjonen er definert i området gitt ved $x \geq 0$, $y \geq 0$ og $x+y \leq 2$
Skraver definisjonsområdet i xy-planet.
Finn de globale ekstrempunktene og ekstremverdiene i dette området.

Oppgave 3

En bedrift produserer to varer, vare A og vare B.
Prisen på varene er hhv. p og q.

Bedriften regner med at etterspørselen etter vare A er gitt ved $x = 20 - 2p + q$
og at etterspørselen etter vare B er gitt ved $y = 20 + p - 2q$
Kostnadene ved å produsere en enhet av vare A og vare B er hhv. 3 og 4. Vi skal regne med at bedriften ikke har faste kostnader.

a) Vis at fortjenesten til bedriften vil være gitt ved
$f(p,q) = -2p^2 + 2pq - 2q^2 + 22p + 25q - 140$

b) $f(p,q)$ har ett stasjonært punkt. Dette punktet gir maksimal fortjeneste. Finn punktet. Hvor stor blir fortjenesten?

c) På grunn av begrenset tilgang på et råstoff som inngår i begge produkter kan bedriften ikke produsere mer enn 12 enheter av vare A og B tilsammen.
Hvilke priser bør bedriften ta dersom den ønsker å maksimere fortjenesten?
Benytt Lagrangemultiplikatorer.

Oppgave 4

a) For hvilke verdier av a har likningssettet

$$
\begin{aligned}
ax_1 + (1-a)x_2 + x_3 &= 2 \\
x_1 + \quad\quad x_2 + x_3 &= 8 \\
3x_1 + \quad\quad x_2 + x_3 &= 8
\end{aligned}
$$

<u>en</u> løsning ?

b) Løs likningssystemet når $a = 2$.
Benytt matriseinvertering.

c) For hvilke verdier av a er $x_3 = a$?
Hint: Benytt Cramers regel.

Oppgave 5

a) Finn integralet $\int_6^7 \frac{2x-5}{x^2-5x}dx$

b) Finn integralet $\int_0^1 (x+1)x\,dx$

c) Finn integralet $\int (x+1)^n x\,dx$

Finn $\int_0^1 (x+1)^4 x\,dx$

d) Løs ulikheten $2x - xe^x > 0$.
Finn arealet avgrenset av grafene til de to funksjonene $f(x) = xe^x$ og $g(x) = 2x$

Sensorveiledning siv 1000 gitt 20.08.98

Oppgave 1

a) $\frac{4}{x^2}+\frac{12}{x}-40=0$ $\quad$ $4+12x-40x^2=0$

$40x^2-12x-4=0$ $\quad$ $10x^2-3x-1=0$

$\frac{3\pm\sqrt{9+40}}{20}=\frac{3\pm 7}{20}$ $\quad$ $x=-\frac{1}{5}$ eller $x=\frac{1}{2}$

b) $\frac{x-5}{x}-\frac{2x}{x+5}+1>0$ $\quad$ $\frac{(x-5)(x+5)-2x^2+x(x+5)}{x(x+5)}>0$

$\frac{x^2-25-2x^2+x^2+5x}{x(x+5)}>0$ $\quad$ $\frac{5x-25}{x(x+5)}>0$ $\quad$ $\frac{5(x-5)}{x(x+5)}>0$

```
              -5          0           5
------------------------------------------------------
5(x-5) ------------------------------0----------------
x       --------------x-------------------------------
x+5     ------x---------------------------------------
        ------x———————x----------0--------------------
```

Ulikheten er oppfylt når $-5<x<0$ eller $x>5$

c) $1000\cdot 1.06^x=3\cdot 1000$ $\quad$ $1.06^x=3$ $\quad$ $x\ln(1.06)=\ln 3$

$x=\frac{\ln 3}{\ln(1.06)}\approx 18.85$

d) $1000\cdot 1.06^x=3\cdot 1000\cdot 1.03^x$ $\quad$ $\left(\frac{1.06}{1.03}\right)^x=3$ $\quad$ $x\cdot\ln\left(\frac{1.06}{1.03}\right)=\ln 3$

$x=\frac{\ln 3}{\ln\left(\frac{1.06}{1.03}\right)}=38.26$

Oppgave 2

$f(x,y)=x^3y+x^2y^2-x^2y=x^2y(x+y-1)$

a) $f'_x=3x^2y+2xy^2-2xy=xy(3x+2y-2)=0$

$f'_y = x^3 + 2x^2y - x^2 = x^2(x+2y-1) = 0$

$f''_{xx} = 6x\ y + 2y^2 - 2y \qquad f''_{xy} = 3x^2 + 4xy - 2x \qquad f''_{yy} = 2x^2$

b) Skal $f'_x = 0$ må $x = 0$ eller $y = 0$ eller $3x + 2y - 2 = 0$
Skal $f'_y = 0$ må $x = 0$ eller $x + 2y - 1 = 0$
Når $x = 0$ er begge de partiellederdiverte lik null.
$(0, b)$ er derfor et stasjonært punkt for alle verdier av b. Er $y = 0$ må $x = 1 - 2y = 1$
$(1,0)$ er derfor et stasjonært punkt.
Løser vi likningssettet

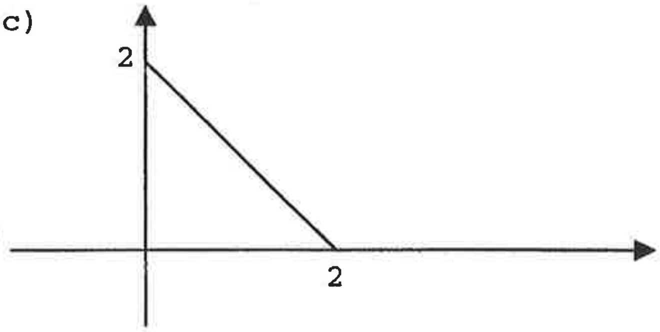
$$3x + 2y - 2 = 0$$
$$x + 2y - 1 = 0$$

får vi løsningene $x = \frac{1}{2} \qquad y = \frac{1}{4}$

Stasjonært punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

	A	B	C	$AC - B^2$	
$(0, b)$	$2b^2 - 2b$	0	0	0	Ingen avgjørelse
$(1,0)$	0	1	2	-1	Sadelpunkt
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	Lok. min.

c)



Randa $x = 0 \qquad f(0, y) = 0$
Randa $y = 0 \qquad f(x,0) = 0$
Randa $x + y = 2$ Dette gir $y = 2 - x$
Setter vi dette inn i funksjonen får vi
$h(x) = f(x, 2 - x) = x^2(2 - x)(x + 2 - x - 1) = 2x^2 - x^3$

$h'(x) = 4x - 3x^2 = x(4 - 3x) = 0$ Dette gir $x = 0$ eller $x = \frac{4}{3}$

Er $x = \frac{4}{3}$ så må $y = 2 - x = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

Mulige ekstrempunkter:

$(0,y)$	$0 \le y \le 2$	$f(0,y)=0$	
$(x,0)$	$0 \le x \le 2$	$f(x,0)=0$	
$(\frac{4}{3},\frac{2}{3})$		$f(\frac{4}{3},\frac{2}{3})=\frac{32}{27}$	Globalt maksimum.
$(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$		$f(\frac{1}{2},\frac{1}{4})=-\frac{1}{64}$	Globalt minimum.

Oppgave 3

a) $f(p,q)=(p-3)x+(q-4)y=(p-3)(20-2p+q)+(q-4)(20+p-2q)=$
$20p-2p^2+pq-60+6p-3q+20q+pq-2q^2-80-4p+8q=$
$-2p^2+2pq-2q^2+22p+25q-140$

b) $f'_p=-4p+2q+22$ $\qquad$ $f'_q=2p-4q+25$
Skal begge de partiellederiverte være null må

I $\quad -4p+2q+22=0$ $\qquad$ I $\quad -4p+2q+22=0$

II $\quad 2p-4q+25=0$ $\qquad$ 2 II $\quad 4p-8q+50=0$

$-6q=72 \qquad q=12$

$$p=\frac{4q-25}{2}=\frac{4\cdot 12-25}{2}=11.5 \qquad f(11.5,12)=136.5$$

c) Skal $x+y=12$ må $20-2p+q+20+p-2q=12$

Dette gir p+q-28.

$F(p,q)=-2p^2+2pq-2q^2+22p+25q-140-\lambda(p+q-28)$
$F'_p=-4p+2q+22-\lambda=0$ $\qquad$ $F'_q=2p-4q+25-\lambda=0$
Herav følger $\quad -4p+2q+22=2p-4q+25$
$-6p+6q=3$
$-2p+2q=1$ $\quad$ Bibetingelsen gir
$2p+2q=56$ $\quad$ Av dette følger $4q=57$ $\qquad q=\frac{57}{4}=14.25$

$$p=\frac{2q-1}{2}=q-0.5=13.75$$

Oppgave 4

a) Skal likningssystemet ha en løsning må determinanten $|A|$ til likningssystemet være forskjellig fra null.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1-a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a + 3(1-a) + 1 - a - (1-a) - 3 = -2a \neq 0$$

$a \neq 0$

b) Er $a = 2$ blir $|A| = -4$

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_{adj} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

c) Benytter vi cramers regel finner vi:

$$x_3 = \frac{|B_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a & 1-a & 2 \\ 1 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}}{-2a} = \frac{12-16a}{-2a} = \frac{16a-12}{2a} = \frac{8a-6}{a} \qquad \frac{8a-6}{a} = a$$

$8a - 6 = a^2 \qquad a^2 - 8a + 6 = 0 \qquad a = 4 - \sqrt{10}$ eller $a = 4 + \sqrt{10}$

Oppgave 5

a) $\displaystyle\int_6^7 \frac{2x-5}{x^2-5x}dx \qquad \frac{2x-5}{x^2-5x} = \frac{2x-5}{x(x-5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-5}$

$2x - 5 = A(x-5) + Bx$

Setter vi inn $x = 0$ får vi $A = 1$

Setter vi inn $x = 5$ får vi $B = 1$

$$\frac{2x-5}{x^2-5x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-5}$$

$$\int_6^7 \frac{2x-5}{x^2-5x}dx = \int_6^7 \left(\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x}\right)dx = \left[\ln|x-5| + \ln|x|\right]_6^7 =$$

$$\ln 2 + \ln 7 - (\ln 1 + \ln 6) = \ln 2 + \ln 7 - \ln 6 \approx 0.8473$$

b) $$\int_0^1 (x+1)x\,dx = \int_0^1 (x^2+x)dx = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

c) $$\int (x+1)^n x\,dx = \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}x - \int \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}dx = \frac{(x+1)^{n+1}x}{n+1} - \frac{(x+1)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + C$$

$$\int_0^1 (x+1)^4 x\,dx = \frac{2^5}{5} - \frac{2^6}{30} + \frac{1}{30} = \frac{129}{30} = \frac{43}{10} = 4.3$$

Alternativ løsningsmetode:

$u = x+1 \qquad x = u-1 \qquad dx = du$ Setter vi inn dette får vi

$$\int (x+1)^n x\,dx = \int u^n(u-1)du = \int (u^{n+1}-u^n)du = \frac{u^{n+2}}{n+2} - \frac{u^{n+1}}{n+1} + C = \frac{(x+1)^{n+2}}{n+2} - \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int_0^1 (x+1)^4 x\,dx = \left[\frac{(x+1)^6}{6} - \frac{(x+1)^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2^6}{6} - \frac{2^5}{5} - \left(\frac{1}{6}-\frac{1}{5}\right) = \frac{129}{30} = \frac{43}{10} = 4.3$$

e) $2x - xe^x > 0 \qquad x(2-e^x) > 0$

				$\ln 2$	
x	- - - - - - - -	0	————		————
$2-e^x$	————		————	0	- - - - - - - -
	- - - - - - - -	0	————	0	- - - - - - - -

Ulikheten er oppfylt når $0 < x < \ln 2$

Arealet er $\int\limits_0^{\ln 2} (2x - xe^x)dx$

Nå er $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$

Arealet blir derfor $\int\limits_0^{\ln 2} (2x - xe^x)dx = \left[x^2 - xe^x + e^x\right]_0^{\ln 2} =$

$(\ln 2)^2 - 2 \cdot \ln 2 + 2 - (0 - 0 + 1) = (\ln 2) - 2 \cdot \ln 2 + 1 \approx 0.0942$

Handelshøyskolen BI LF
Institutt for samfunnsøkonomi

Skriftlig eksamen i: SIV 10001 Matematikk

Studium: Siviløkonomstudiet.

Eksamensdato: 21.06.99, kl. 09-14

Tillatte hjelpemidler: Alle
Antall sider: 4
Innføringsark: Ruteark

NB! Alle utregninger skal begrunnes.

Oppgave 1

a) Løs likningen $\frac{8}{x-1}+\frac{16}{x+1}=8$

b) Beregn $\int_0^b xe^x dx$

Bestem b slik at integralet blir lik 1.

c) En person låner 230 000 kr til 7% årlig rente. Lånet skal tilbakebetales etter annuitetsprinsippet med et fast årlig beløp. Første beløp betales ett år etter låneopptaket, siste beløp 14 år etter låneopptaket. Hvor stor er den årlige innbetalingen?

d) En by A har 100 000 innbyggere. Her vokser befolkningen med 2% i året.
En annen by B har 152 000 innbyggere. Her avtar befolkningen med 1% i året.

Hvor mange innbyggere har hhv. A og B etter 5 år ?

Finn ved regning når de to byene har samme antall innbyggere.

Oppgave 2

To bedrifter, A og B konkurrerer på et marked.
De produserer samme produkt, og prisen p som de får for produktet vil være avhengig av samlet tilbud fra de to bedriftene.

$p = 1800 - 2(x + y)$

Her er x og y er produsert mengde fra hhv. bedrift A og B .

Kostnadsfunksjonene er hhv.

$C_A(x) = x^2 + 200x + 120\,000$

$C_B(y) = 2y^2 + 240y + 40\,000$

a) Anta at bedrift A produserer 140 enheter. Vis at profittfunksjonen for bedrift B er
$\pi_B(y) = -4y^2 + 1280y - 40\,000$
Hvor mye bør bedrift B produsere dersom den ønsker å maksimere fortjenesten? Hvor stor blir fortjenesten.

b) Vis at dersom de to bedriftene samarbeider så vil den samlede fortjenesten være gitt ved:

$$f(x, y) = -3x^2 - 4xy - 4y^2 + 1600x + 1560y - 160\,000$$

Hvor mye bør hver av bedriftene produsere dersom de ønsker å maksimere den samlede fortjenesten? Hvor stor blir den samlede fortjenesten?

c) Anta at de to bedriftene samarbeider. I produksjonen av en enhet av produktet går det med en enhet av et bestemt råstoff uansett om produktet blir produsert i bedrift A eller bedrift B. Bedriftene har til sammen tilgang på 236 enheter av råstoffet. Hvor mye bør hver av bedriftene produsere dersom de ønsker å maksimere den samlede fortjenesten?

d) Vi antar nå at bedriftene ikke samarbeider. Dessuten regner vi med at det er ubegrenset tilgang på råstoffet. A produserer 220 enheter og B produserer 140 enheter. Vis at ingen av bedriftene har noe å vinne på endret produksjon, forutsatt at konkurrenten ikke endrer sin.

Oppgave 3

Etterspørselen etter en vare er gitt ved

$f(x,y) = 10x^{0.7}y^{-0.3}$. Her er x befolkningens gjennomsnittsinntekt , og y prisen på varen.

a) Hvor stor er etterspørselen derom $x = 100$ og $y = 50$?

b) Anta $x = 100$. Hvilken pris gir en etterspørsel på 150 ?

c) Ved tidspunktet $T = 0$ er $x = 100$ og $y = 50$. Anta at både inntekten og prisen vokser med 5% i året.
Forklar hvorfor inntekten ved tidspunktet T er gitt ved $x(T) = 100 \cdot 1.05^T$.
Hva blir prisen $y(T)$ ved tidspunktet T ?

d) Hvor stor er etterspørselen når $T = 3$?

Oppgave 4

a) Finn den inverse matrisen til

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) La $B = \begin{pmatrix} 19 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$ Finn en 3×1 matrise X slik at

$$AX = B$$

c) Finn en 3×3 matrise Y slik at

$$(Y + A^{-1})A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

d) Beregn determinanten til matrisen M

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e) Vis at likningssettet

$$\begin{aligned} ax_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 1 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 &= 1 \\ -ax_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

alltid har entydige løsninger.
(Du behøver ikke finne løsningen)

Sensorveiledning i SIV 10001 Matematikk
Eksamensdato: 21.06.99
Dette er kun en sensorveiledning og ikke et løsningsforslag.

Oppgave 1

a) $\frac{8}{x-1}+\frac{16}{x+1}=8$ Jeg ganger med $(x-1)(x+1)$ på begge sider av likningen og får:

$8(x+1)+16(x-1)=8(x^2-1)$ Dette kan skrives som
$8x(x-3)=0$ $x=0$ eller $x=3$

b) Jeg benytter delvis integrasjon
$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$

$\int_0^b xe^x dx = be^b - e^b + 1 = 1$ Dette gir likningen

$(b-1)e^b = 0$ $b=1$

c) $K = K_0 \frac{(1+r)^n r}{(1+r)^n - 1} = 230000 \frac{1.07^{14} \cdot 0.07}{1.07^{14}-1} = 26299.34$

d) Antall innbyggere i by A etter 5 år er
$100000 \cdot 1.02^5 = 110408.08$
Antall innbyggere i by B etter 5 år er
$152000 \cdot 0.99^5 = 144550.49$

Skal de to byene ha samme antall innbyggere må

$100000 \cdot 1.02^x = 152000 \cdot 0.99^x$

$(\frac{1.02}{0.99})^x = \frac{152000}{100000}$ $x = \frac{\ln(1.52)}{\ln(\frac{1.02}{0.99})} = 14.0258$

Oppgave 2

a) $\pi_B(y) = p \cdot y - C_B(y) =$
$(1800 - 2(140 + y))y - (2y^2 + 240y + 40000) = -4y^2 + 1280y - 40000$

$\pi_B'(y) = -8y + 1280 = 0$ y=160

Drøfter vi fortegnet til den deriverte på tallinjen finner vi at y=160 gir maksimal fortjeneste.
$\pi_B(160) = 62400$

b) $f(x,y) = px + py - C_A(x) - C_B(y) =$
$(1800 - 2x - 2y)(x + y) - (x^2 + 200x + 120000) - (2y^2 + 240y + 40000) =$
$-3x^2 - 4xy - 4y^2 + 1600x + 1560y - 160\,000$
$f'_x = -6x - 4y + 1600 = 0$ $f'_y = -4x - 8y + 1560 = 0$
Dette gir løsningene x=205 y=92.5
$f(205{,}92.5) = 76150$

c) $F(x,y) = -3x^2 - 4xy - 4y^2 + 1600x + 1560y - 160000 - \lambda(x + y - 236)$

$F'_x = -6x - 4y + 1600 - \lambda = 0$
$F'_y = -4x - 8y + 1560 - \lambda = 0$ Herav følger:

$-2x + 4y + 40 = 0$ Dette sammen med bibetingelsen
$x + y = 236$ gir $x = 164$ $y = 72$

d) Dersom B produserer 140 enheter blir fortjenesten til A
$\pi_A(x) = px - C_A(x) = (1800 - 2(x + 140))x - (x^2 + 200x + 120000) =$
$-3x^2 + 1320x - 120000$
$\pi_A'(x) = -6x + 1320 = 0$ $x = 220$
Drøfter vi den deriverte på tallinjen ser vi at A får maksimal fortjeneste når den produserer 220 enheter. Det vil ikke lønne seg for A og endre sin produksjon.
Tilsvarende dersom A produserer 220 enheter blir fortjenesten til B
$\pi_B(y) = py - C_B(y) = (1800 - 2(220 + y))y - (2y^2 + 240y + 40000) =$
$-4y^2 + 1120y - 40000$
$\pi_B'(y) = -8y + 1120 = 0$ $y = 140$

Drøfter vi den deriverte på tallinjen ser vi at B får maksimal fortjeneste når den produserer 140 enheter. Det vil ikke lønne seg for B og endre sin produksjon.

Oppgave 3

a) $f(x,y) = 10x^{0.7}y^{-0.3}$ $\qquad f(100,50) = 10 \cdot 100^{0.7} \cdot 50^{-0.3} = 77.68$

b) $f(100,y) = 10 \cdot 100^{0.7} \cdot y^{-0.3} = 150$

$$y^{-0.3} = \frac{150}{10 \cdot 100^{0.7}} \qquad y = \left(\frac{150}{10 \cdot 100^{0.7}}\right)^{-\frac{1}{0.3}} = 5.5765$$

c) $x(T) = 100 \cdot 1.05^T$ $\qquad y(T) = 50 \cdot 1.05^T$

d) $f(x(T),y(T)) = 10 \cdot (100 \cdot 1.05^T)^{0.7} \cdot (50 \cdot 1.05^T)^{-0.3} = 10 \cdot 100^{0.7} \cdot 50^{-0.3} \cdot 1.05^{0.4T}$

$f(x(3),y(3)) = 10 \cdot 100^{0.7} \cdot 50^{-0.3} \cdot 1.05^{1.2} = 82.3638$

Oppgave 4

a) $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 + 8 - 2 - 6 - 2 = 2 \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{adj} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{|A|} A_{adj} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

b) $AX = B$ $$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

c) $$(Y+A^{-1})A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix} \qquad YA+I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

$$YA=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$Y=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}A^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{5}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\3&1&-5\end{pmatrix}$$

d) $$\begin{vmatrix}1&2&3&1\\5&1&2&6\\0&0&-1&-1\\1&2&1&2\end{vmatrix}=(-1)^{3+3}\cdot(-1)\begin{vmatrix}1&2&1\\5&1&6\\1&2&2\end{vmatrix}+(-1)^{3+4}\cdot(-1)\begin{vmatrix}1&2&3\\5&1&2\\1&2&1\end{vmatrix}=$$

(-1)(2+12+10-12-20-1)+(1+4+30-4-10-3)=(-1)(-9)+18=27

e) $$\begin{vmatrix}a&2&3&1\\5&1&2&6\\0&0&-a&-1\\1&2&1&2\end{vmatrix}=(-1)^{3+3}\cdot(-a)\begin{vmatrix}a&2&1\\5&1&6\\1&2&2\end{vmatrix}+(-1)^{3+4}\cdot(-1)\begin{vmatrix}a&2&3\\5&1&2\\1&2&1\end{vmatrix}=$$

(-a)(2a+12+10-12a-20-1)+(a+4+30-4a-10-3)=
$10a^2-4a+21$

$10a^2-4a+21=0 \qquad a=\dfrac{4\pm\sqrt{4^2-4\cdot10\cdot21}}{20}=\dfrac{4\pm\sqrt{-824}}{20}$

Det eksister derfor ingen verdier av a slik at
$|A|=0$ Det vil si $|A|\neq 0$
Likningssettet har alltid entydige løsninger.

Handelshøyskolen BI
Institutt for samfunnsøkonomi

F

Skriftlig eksamen i: SIV 10001 Matematikk

Studium: Siviløkonomstudiet.

Eksamensdato: 31.08.99, kl. 09-14

Tillatte hjelpemidler: Alle
Antall sider: 3
Innføringsark: Ruteark

NB! Alle utregninger skal begrunnes.

Oppgave 1

a) Løs likningen $\frac{8}{x-1} = \frac{25}{x} - 3$

b) Løs likningen $x + \sqrt{x-1} = 21$

c) Beregn $\int_1^b \ln x \, dx$

Bestem b slik at integralet blir lik 1.

d) Beregn $\int \frac{x-1}{(x-3)(x+1)} dx$

e) Skraver definisjonsområdet til $f(x,y) = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - y^2}$

Oppgave 2

En person låner 80 000 kr til 8% årlig rente.
Lånet skal tilbakebetales etter annuitetsprinsippet med et fast årlig beløp. Første beløp betales ett år etter låneopptaket, siste beløp 9 år etter låneopptaket

a) Hvor stor er den årlige innbetalingen?

b) Hvor stor er restgjelden like før den 9. innbetalingen?

c) Hvor stor er restgjelden like etter den 7. innbetalingen?

Oppgave 3

En bedrift produserer en vare som den selger for 16 per enhet. Antall enheter x som produseres er avhengig av antall timer arbeid L som benyttes.
Bedriften regner med at $x = 3\sqrt{L}$ og at timeprisen for arbeid er $w = 4\sqrt{L}$

a) Hvor stor er timeprisen dersom $L = 4$?
For hvilken verdi av L er timeprisen 12 ?

b) Vis at bedriftens fortjeneste er $\pi(L) = 48L^{\frac{1}{2}} - 4L^{\frac{3}{2}}$

C) For hvilken verdi av L blir fortjenesten maksimert og hvor stor blir da fortjenesten ?

Oppgave 4

Gitt funksjonen $f(x,y) = 2x^3 - x^2y + y^2$

a) Finn de stasjonære punktene. Bruk annenderivert-testen og prøv å klassifisere disse.

b) Vi skal nå anta at $f(x,y)$ er definert i området gitt ved $0 \le x \le 1 \quad 0 \le y \le 1$
Finn de globale ekstrempunktene i dette området.

Oppgave 5

a) Finn den inverse matrisen til

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) La $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ Finn en 3×1 matrise X slik at

$$AX = B$$

c) Finn en 3×3 matrise Y slik at

$$A + YA = AD \quad \text{der} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) La $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ være løsning av likningssystemet

$$\begin{pmatrix} a & 3 & 3 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

For hvilke verdier av a har likningssystemet eksakt en løsning?
For hvilke verdier av a er $x_1 + x_2 + x_3 = 0$?

Fasit SIV 1000 Matematikk, gitt 31.08.99

1 a) vi $x=\frac{5}{3}$ eller $x=5$ b) $x=17$

c) $b\ln b-b+1$ $b=e$ d) $\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x-3\right|+C$

e)

2 a) 12806.38 b) 12806.38 c) 22837.17

3 a) $w=8$ $L=9$ c) $L=4$ $\pi(4)=64$

4) a) Stasjonære punkter $(0,0)$ $AC-B^2=0$ og
$(6,18)$ sadelpunkt

b) $(0,0)$ er et globalt minimumspunkt.
$(1,0)$ og $(1,1)$ er globale maksimumspunkter.

5 a) $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&2\\1&-3&-1\\0&2&0\end{pmatrix}$ b) $X=\begin{pmatrix}3\\-4\\2\end{pmatrix}$ c) $Y=\begin{pmatrix}0&3&5\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

d) $a\neq 1$ $a=\frac{10}{3}$

Handelshøyskolen BI
Institutt for samfunnsøkonomi F

Skriftlig eksamen i: SIV 10001 Matematikk

Studium: Siviløkonomstudiet.

Eksamensdato: 13.06.00, kl. 09-14

Tillatte hjelpemidler: Alle
Antall sider: 4
Innføringsark: Ruteark

NB! Alle oppgavene skal løses ved regning.

Oppgave 1

Verdien av en gjenstand ved tidspunktet t er $V(t) = 195 + 5t^2$
(I dag er $t = 0$)

a) Hvor lang tid går det før verdien er steget til 800?

b) Dersom vi regner med 5% kontinuerlig rente er nåverdien av gjenstanden ved tidspunktet t,

$$F(t) = V(t)e^{-0.05t}$$

Når er nåverdien størst?

c) Dersom $V(t)$ er en generell funksjon og dersom vi regner med en kontinuerlig rente, r, er nåverdien av gjenstanden ved tidspunktet t,

$$F(t) = V(t)e^{-rt}$$

Vis at dersom nåverdien skal ha sin største verdi, så må følgende være oppfylt:

$$r = \frac{V'(t)}{V(t)}$$

d) Bruk resultatet i c) til å kontrollere det svaret du fikk i b)

Oppgave 2

a) Løs integralet $\int \frac{4}{x^2-4}dx$

b) Løs integralet $\int \frac{2t-2}{t^2-2t}dt$

c) La $x \geq 3$. Finn x av likningen $\int_3^x \frac{2t-2}{t^2-2t}dt = \ln(\frac{2}{3}x-1)$

Oppgave 3

Gitt funksjonen $f(x,y) = x^4 + 2y^2 - 2xy$

a) Finn de stasjonære punktene til $f(x,y)$

b) Klassifiser de stasjonære punktene.

c) Vi lar nå $f(x,y)$ være definert i området gitt ved:

$0 \leq x \leq 1$ og $0 \leq y \leq 2$

Finn funksjonens globale ekstrempunkter og verdier.

Oppgave 4

En bedrift produserer en vare.
Anta at sammenhengen mellom etterspørselen x, reklamekostnadene y og prisen p er:

$x = (50-p)\frac{y}{y+1}$ $x > 0$, $y > 0$ og $0 < p < 50$

Kostnaden ved å produsere x enheter er $C(x) = 36x + 10$

a) Forklar at etterspørselen avtar når prisen øker og reklamekostnadene holdes konstant.

b) Vis at etterspørselen øker når reklamekostnadene øker og prisen holdes konstant.

c) Dersom vil løser likningen $x = (50 - p)\dfrac{y}{y+1}$ med hensyn på

p får vi $\quad p = 50 - \dfrac{y+1}{y}x$

Vis at bedriftens fortjeneste som funksjon av x og y

er: $\quad f(x,y) = -x^2 - \dfrac{x^2}{y} + 14x - y - 10$

(Husk at reklamekostnader også er kostnader)

d) Hvor mye må bedriften produsere og hvor store må reklamekostnadene være dersom den ønsker å maksimere fortjenesten? Hva blir prisen?

Oppgave 5

En mann ønsker å lage en privat pensjonsordning. På sin 40.årsdag setter han av 6000 kr. Videre setter han av på hver fødselsdag til og med den dagen han fyller 64 år, et beløp som er 10% større enn det forrige beløp. På 41-årsdagen setter han således av 6600 kr.

a) Hvor stort er det beløpet han setter av på sin 50-årsdag?

b) Hvor stort beløp har han i alt satt av?

Vi regner nå med at alle beløpene settes i banken fortløpende. Renten er fast 5% p.a.

c) Hvor mye har beløpet i a) vokst til på hans 65-årsdag?

d) Hvor mye har han ialt i banken på sin 65-årsdag?
(Hint: Finn k i den geometriske rekken.)

Oppgave 6

Gitt funksjonen $\quad f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$

Punktet $(3,1)$ ligger på nivålinjen $z = f(x,y) = 18$

a) Finn likningen til tangenten til nivålinjen i punktet $(3,1)$

b) Finn de punktene på nivålinjen hvor tangenten er horisontal.

Oppgave 7

En fabrikk produserer tre forskjellige komponenter A,B og C. Alle komponentene må gjennom maskinene M_1 , M_2 og M_3.

	A	B	C
M_1	3	2	2
M_2	2	4	2
M_3	1	2	4

Tabellen viser maskinenes timeforbruk.

1. kolonne kan leses: komponent A trenger 3 timer i maskin M_1 , 2 timer i M_2 og 1 time i M_3

a) Hvor mange timer går med fra hver maskin dersom vi produserer 2 enheter av hver komponent?

b) Vi produserer x_1 enheter av A, x_2 av B og x_3 av C Maskinene brukes hhv. 22, 24 og 18 timer i uken. Finn ved matriseregning hvor mye vi produserer av A,B og C.

Fasit i Siv 1000 gitt 13.06.00

1 a) $t = 11$ b) t=39

2 a) $\int \frac{4}{x^2-4}dx = \ln|x-2| - \ln|x+2| + C$

b) $\int \frac{2t-2}{t^2-2t}dt = \ln|t^2-2t| + C$ c) $x = 3$

3 a) og

b) $(0,0)$ Sadelpunkt $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$ lokalt minimumspunkt

$(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ lokalt minimumspunkt.

c) $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ globalt minimumspunkt $(0,2)$ globalt maksimumspunkt

4 b) $\frac{\partial x}{\partial y} = (50-p)\cdot\frac{1}{(y+1)^2} > 0$ d) $x = 6$ $y = 6$ $p = 43$

5) a) 15562.45 b) 590082.36 c) 32353.22

d) 938492.23

6 a) $y = -\frac{2}{3}x + 3$ b) $(-3,3)$ og $(3,-3)$

7 a) 14, 16 og 14 b) 4 , 3 og 2

Handelshøyskolen BI
Institutt for samfunnsøkonomi F

Skriftlig eksamen i: SIV 10001 Matematikk

Studium: Siviløkonomstudiet.

Eksamensdato: 11.09.00, kl. 15-20

Tillatte hjelpemidler: Alle
Antall sider: 3
Innføringsark: Ruteark

NB! Alle oppgavene skal løses ved regning.

Oppgave 1

Gitt funksjonen $f(x,y)=2x^2y-xy-2x$

a) Beregn de partiell deriverte av første og annen orden.

b) Finn eventuelle stasjonære punkter og klassifiser disse.

c) Vis at $f(x,y)$ ikke har noe globalt maksimum.

Vi skal heretter anta at $f(x,y)$ er definert i området gitt ved:
$x\geq 0$ og $x-2\leq y\leq 0$

d) Skraver definisjonsområdet til $f(x,y)$ i xy-planet.

e) Finn de globale ekstrempunktene til $f(x,y)$.

Oppgave 2

Gitt matrisene $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ og $B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$

a) Beregn A^{-1} , B^{-1} , AB og $(AB)^{-1}$
Vis ved regning at $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

b) La X og Y være to kvadratiske matriser av samme størrelse. Anta også at X^{-1} og Y^{-1} eksisterer.
Vis at $(XY)^{-1}=Y^{-1}X^{-1}$

Oppgave 3

En kjemisk fabrikk A forurenser en innsjø med en forurensningshastighet $r(t) = 45t^{0.5}$ tonn per år. Her er t antall år som er gått etter at fabrikken har startet opp. Den totale forurensningen som blir tilført innsjøen de første t årene er gitt ved

$$f(t) = \int_0^t r(x)dx = \int_0^t 45x^{0.5}dx$$

a) Beregn $\int 45x^{0.5}dx$

b) Beregn $f(t)$. Hvor stor er den totale forurensningen i løpet av de 3 første årene.

c) Anta at alt liv i innsjøen dør ut dersom den samlede forurensning overstiger 240 tonn. Hvor lang tid går det før innsjøen er livløs?

En annen kjemisk fabrikk B, produserer det samme produktet. Denne bedriften har investert i et renseanlegg.
Forurensningshastigheten er $r(t) = \dfrac{60t}{t^2+1}$

d) Beregn $\int \dfrac{60x}{x^2+1}dx$

e) Hvor stor er den totale forurensningen fra B i løpet av de 3 første årene?

f) Hvor lang tid går det før den totale forurensningen fra B er 240 tonn?

Oppgave 4

Antall enheter z som en bedrift produserer er avhengig av innsats faktorene x og y. $z = f(x,y) = 50x^{0.2}y^{0.8}$

a) Hvor mye produseres dersom $x = 32$ og $y = 243$

b) Beregn f_x' og $f_x'(32, 243)$. Hvordan vil du tolke dette tallet?

c) Finn den deriverte til nivåkurven $f(x,y)=8100$ i punktet $(32,243)$.

d) Finn et punkt på nivåkurven $f(x,y)=8100$ der den deriverte er -8

e) Finn maksimal produksjon dersom $2x+y=300$

Oppgave 5

Et lån på 200 000 kr skal amortiseres (tilbakebetales) i løpet av 15 år.

a) Hvor stort blir det årlige beløpet når rentefoten er konstant på 5% p.a. og første betaling skjer ett år etter låneopptak? Hvor mye vil kunden betale i alt (avdrag og renter)?

Det viser seg at umiddelbart etter 10. innbetaling blir renten hevet til 6% p.a.

b) Hvor mye har kunden betalt i alt når lånet er innfridd.

Fasit til Siv1000 matematikk, gitt 11.09.00

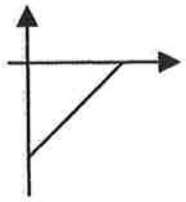
1 a) $f'_x = 4xy - y - 2$ $\quad f'_y = 2x^2 - x$

$f''_{xx} = 4y$ $\quad f''_{xy} = 4x - 1$ $\quad f''_{yy} = 0$

b) $(0,-2)$ og $(\frac{1}{2},2)$ er sadelpunkter.

c) Da $\lim_{x\to\infty} f(x,1) = \lim_{x\to\infty}(2x^2 - 3x) = \infty$ har $f(x,y)$ ikke noe globalt maksimum.

d)



e) $f(0,b) = 0 \quad -2 \le b \le 0$ globale maksimumspunkter

$f(\frac{5}{3},-\frac{1}{3}) = -4.63$ globalt minimumspunkt

2 a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1.5 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad AB = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$

$(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -6.5 \end{pmatrix}$

3 a) $30x^{1.5} + C$ b) $f(t) = 30t^{1.5}$ $\quad f(3) = 155.88$ c) $t = 4$

d) $30\ln(x^2+1) + C$ e) 69.08 f) $t = 54.59$

4 a) $f(32,243) = 8100$ b) 50.625. c) $y'(32,243) = -1.9$

d) $x = 10.125$ $\quad y = 324$ e) $x = 30$ $\quad y = 240$

5 a) 19268.46 $\quad 289026.90$ b) 291705.45

Handelshøyskolen BI
Institutt for samfunnsøkonomi

Skriftlig eksamen i:	SIV 10001 Matematikk F
Studium:	Siviløkonomstudiet.
Eksamensdato:	12.06.01, kl. 09-14
Tillatte hjelpemidler:	Alle
Antall sider:	3
Innføringsark:	Rutcark

NB! Alle oppgavene skal løses ved regning.

Oppgave 1

a) Løs likningen $\sqrt{x-4}+x+4=2(x-10)$

b) Beregn integralet $\int \frac{x}{(x-4)(x-5)}dx$

c) Skraver definisjonsområdet til i) $f(x,y)=\sqrt{y-x^2}$ og ii) $g(x,y)=\sqrt{y-x^2}+\sqrt{16-x^2-y}$

Oppgave 2

Et land har en ressurs som det ønsker å utnytte og regner med at prisen per enhet ved tidspunktet t vil være gitt ved $p=p(t)=20-t$.

a) Anta at utvinningstakten for denne ressursen er gitt ved $f(t)=6+3t \qquad 0\le t\le 10$.
Antall enheter som blir utvunnet de 10 første årene er derfor $\int_0^{10} f(t)dt$. Finn denne mengden.

b) Inntekten over denne 10 års perioden er gitt ved:

$\int_0^{10} p(t)f(t)dt$. Beregn denne inntekten.

c) På grunn av den teknologiske utviklingen vil antall enheter det er mulig å utvinne øke dersom utvinningen foregår over mange år. Dersom utvinningstakten er gitt ved $f(t)=6+\frac{30}{k}t$ vil alle ressursene være utvunnet etter k år , hvor k en konstant $k>0$.
Hvor mye blir utvunnet i løpet av k år ?

d) Bestem den verdien av k som maksimerer landes inntekt.

Oppgave 3

Gitt funksjonene $f(x,y)=xe^y$ og $g(x,y)=x^2+y^2$

a) Punktet $(2,0)$ ligger på nivålinjen $f(x,y)=2$
Finn ligningen for tangenten i dette punktet.

b) Vis ved regning $f(x,y)$ ikke har stasjonære punkter.

c) Forklar at $f(x,y)$ har både maksimum og minimum når vi innfører bibetingelsen $g(x,y)=2$

d) Bruk Lagrangemultiplikatorer til å finne punktene i c)

Oppgave 4

Antall enheter som en bedrift produserer er gitt ved

$f(K,L)=500(1-e^{-KL})$. Her er K kapital og L arbeidskraft.

a) Beregn $f(0,L)$ og $f(K,0)$

b) Vis at dersom $K>0$ og $L>0$ så er $f(K,L)>0$

c) Hvor mange enheter arbeidskraft går med når produksjonen er 450 enheter og kapitalen $K=2$?

d) Produksjonskostnadene til bedriften er gitt ved $C(K,L) = 0.1K + 0.8L$. Hvor mye kapital og arbeidskraft må bedriften benytte dersom bedriften ønsker å maksimere produksjonen under bibetingelsen $C(K,L) = 0.8$?

Oppgave 5

Gitt likningssettet
$$\begin{aligned}(a-1)x_1 + x_2 + \quad 2ax_3 &= 0\\ -3x_1 + x_2 + \quad x_3 &= 1\\ x_2 + (a+3)x_3 &= 2\end{aligned}$$

a) Vis ved regning at likningssettet har entydige løsninger for alle verdier av a.

b) For hvilken verdi av a er $x_1 = 0$?

c) Finn en 3×3 matrise M som er slik at $MM = 3M$ (nullmatrisen regnes ikke som løsning)

d) Gitt matrisene $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

For hvilke verdier av a er B den inverse til A?

Oppgave 6

Et oljeproduserende land ønsker å redusere produksjonen med 2,5% i året. I år 2000 var produksjonen på 150 millioner tonn.

a) Finn totalproduksjonen i tidsrommet fra og med år 2000 til og med år 2009.

b) Hvor lang tid tar det før den totale produksjonen fra og med år 2000 har passert 2000 millioner tonn?

c) Landet hadde i år 2000 en oljereserve på 7000 millioner tonn. Vis ved regning at oljereservene aldri tar slutt dersom utvinningstakten er som beskrevet i begynnelsen av oppgaven.

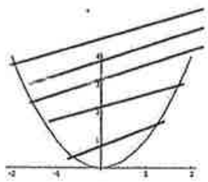
d) Vi setter den årlige nedgangen til p%. Finn den laveste verdien p kan ha slik at vi unngår å bruke opp oljereservene.

Fasit til SIV 1000 gitt 12.06.01

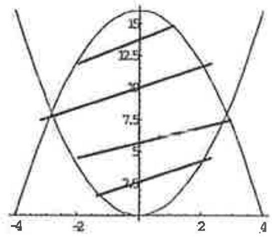
Oppgave 1

a) $x = 29$ b) $5\ln|x-5| - 4\ln|x-4| + C$

c) i)



ii)



Oppgave 2

a) 210 b) 2900 c) $21k$ d) $k = 16.15$

Oppgave 3

a) $y = -0.5x + 1$

d) $f(-1,1) = -e$ Globalt minimum. $f(1,1) = e$ Globalt maksimum.

Oppgave 4

a) $f(0,L) = 0$ $f(K,0) = 0$, c) $L = \dfrac{\ln(0.1)}{-2} \approx 1.1513$ d) $L = 0.5$ $K = 4$

Oppgave 5

b) $a = -\dfrac{1}{3}$ c) $M = 3I = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ c) $a = -2$ eller $a = 2$

Oppgave 6

a) 1342.02 b) $n = 16$ d) $p = 2.1429\%$

Handelshøyskolen BI
Institutt for samfunnsøkonomi

Skriftlig eksamen i: SIV 10001 Matematikk F

Studium: Siviløkonomstudiet.

Eksamensdato: 13.09.01, kl. 09-14

Tillatte hjelpemidler: Alle
Antall sider: 3
Innføringsark: Ruteark

NB! Besvarelsen skal tydelig vise fremgangsmåten du har benyttet.

Oppgave 1

a) Beregn integralet $\int_1^2 x^{-5}dx$

b) En kommunes utgifter til hjemmehjelp var i året 1993 $1\,200\,000$. Deretter steg utgiftene med 5% i året. Hvor store var utgiftene i år 2000?

Hvor store var de samlede utgifter til hjemmehjelp i perioden fra og med 1993 til og med år 2000?

c) Løs likningen $\dfrac{\sqrt{x+5}}{x-5} = \dfrac{1}{3}$

d) Når vi i denne oppgaven regner med % mener vi vekt-%. En prøve på 100 kg fra en sterkt forurenset innsjø innholt 97% vann og 3% forurensninger. Prøven ble stående ute i solskinnet slik at en god del av vannet fordampet. Etter fordampningen var vanninnholdet i prøven sunket til 96%. Hvor mye veier prøven nå? Regn med at det kun er vannet som fordamper.

Oppgave 2

En bedrift produserer en vare som den selger til
en pris $p=5$ per enhet. Kostnadsfunksjonen til bedriften
er gitt ved
$C(x)=3x+3+e^{0.2x}$ $x\geq 0$ (x er antall produserte enheter)

a) Beregn grensekostnaden.
Hvor stor er grensekostnaden for $x=0$?
For hvilken verdi av x er grensekostnaden 10 ?

b) Hvor myc må bedriften produsere og selge dersom den
ønsker å maksimere fortjenesten?

c) Ved å benytte seg av ny teknologi klarer bedriften å
redusere kostnadsfunksjonen til
$C(x)=ax+3+e^{0.2x}$ der $a<3$
Bedriften oppnår nå maksimal fortjeneste ved $x=15$.
Hvilken verdi har a ?

Oppgave 3

a) Det kan vises at funksjonen $f(x,y)=\ln(x-3)+2\ln(y+1)$ har
er maksimumspunkt under bibetingelsen $g(x,y)=2x+3y=21$.
Finn dette punktet.

b) Funksjonen $f(x,y)=\ln(x-3)+2\ln(y+1)$ har et maksimum for
$x=7$ under bibetingelsen $g(x,y)=2x+3y=a$.
Hvilken verdi har a ?

Oppgave 4

Gitt funksjonen $f(x,y)=-1.2x^3+(x^2-x-20)y$

a) Finn de stasjonære punktene til $f(x,y)$

b) Klassifiser de stasjonære punktene.

c) Vi skal heretter anta at definisjonsområdet D_f til $f(x,y)$ er gitt ved $0 \le x \le 5$ $y \ge 0$ $y \le 2x$
Skraver D_f i xy-planet.

d) Forklar hvorfor $f(x,y)$ har både globalt maksimum og minimum i D_f.
Finn de globale maksimum og minimumspunktene til $f(x,y)$ i D_f

Oppgave 5

a) Skriv følgende uttrykk enklere.
$(I+A)A^{-1}(I-A)$. Her er A en kvadratisk matrise, og I enhetsmatrisen av samme dimensjon som A.

b) Gitt matrisene $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ og $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

i) For hvilke verdier av a har likningssystemet

$AX = B$ entydige løsninger?

ii) Beregn matrisen $C = A^2 + I$. Her er I

enhetsmatrisen. $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

iii) Beregn determinanten $|C|$.
Finnes det noen verdier av a slik at $|C| = 0$?

Bruk dette til å vise at likningssystemet $AX + A^{-1}X = B$ har entydige løsninger for alle verdier av a (der A^{-1} eksisterer).

Fasit til siv 1000 gitt 13.09.01

Oppgave 1

a) $\int_1^2 x^{-5}dx = \frac{15}{64} \approx 0.2344$ b) $1688520 \approx 1.69$ mill. $11458931 \approx 11.46$ mill.

c) $x = 20$ d) 75 kg.

Oppgave 2

a) $C'(x) = 3 + 0.2e^{0.2x}$ $C'(0) = 3.2$ $x = \frac{\ln(35)}{0.2} \approx 17.78$ b) $x = \frac{\ln(10)}{0.2} \approx 11.51$

c) $a = 0.9829$

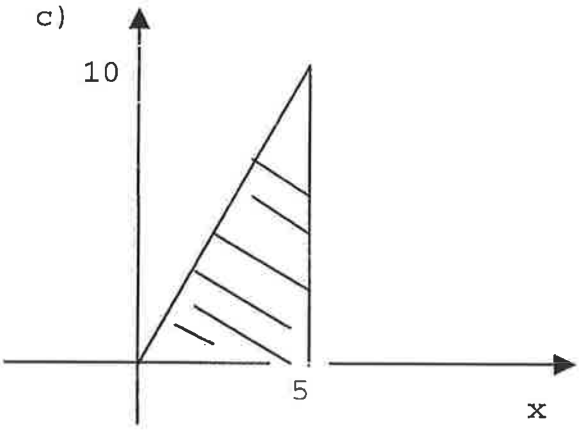
Oppgave 3

a) $f(6,3) = 3.8712$ b) $a = 27$

Oppgave 4

a) og b) $(-4, -6.4)$ sadel, $(5, 10)$ sadel

c)



d) $f(0,0) = 0$ glob maks, $f(5, y) = -150$ glob min for alle $0 \le y \le 10$

Oppgave 5

a) $A^{-1} - A$. b) i) $a \neq 0.5$ ii) $C = \begin{pmatrix} 2+2a & 2a & 0 \\ 4 & 2+2a & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

iii) $|C| = 8(a^2 + 1)$ Vi ser at $|C| > 0$ for alle a.

Handelshøyskolen BI
Institutt for samfunnsøkonomi

Skriftlig eksamen i:	SIV 10001 Matematikk F
Studium:	Siviløkonomstudiet.
Eksamensdato:	11.06.02, kl. 09-14
Tillatte hjelpemidler:	Alle
Antall sider:	4
Innføringsark:	Ruteark

NB! Besvarelsen skal tydelig vise fremgangsmåten du har benyttet

Oppgave 1

En bedrift har funnet ut at overskuddet *f(t)* i millioner er gitt ved

$$f(t) = 25 - 6e^{0.05t^2 - t} \qquad , t > 0$$

der t er antall år etter 2000, *t=1* svarer til *2001* osv

a) Finn *f'(t)* og bestem hvilket år bedriften vil få størst overskudd.

b) Hvis modellen holder i noen år fremover vil overskuddet bli 0. Når vil dette (eventuelt) skje?

Oppgave 2

1. januar 2000 ble det opprettet et fond på 20 mill. kr. Fondet ble plassert slik at det var garantert en renteavkastning på 8% per år. Hvert år , første gang 1. januar 2001, blir det utbetalt en fast sum fra fondet.

a) Forklar at dersom den faste summen hadde vært på 1.5 mill. kr. ville fondet vært "evigvarende".

Det ble imidlertid bestemt at det årlige beløpet skulle være på 2.0 mill. kr.

b) Hvor mye var igjen umiddelbart etter 5. utbetaling?

c) Hvor lenge vil fondet vare?

d) Umiddelbart etter den 5. utbetalingen klarte man å omplassere fondet slik at det fra nå av ble "evigvarende". Hvor stor måtte den nye renten minst være nå.

Oppgave 3

La funksjonen $f(x,y)$ være gitt ved $f(x,y) = x^4 + 2xy + 2y^2$

a) Finn alle stasjonære punkter og avgjør arten av disse.

b) Vis at funksjonen ikke har noe globalt maksimumspunkt.

c) Heretter skal vi anta at definisjonsområdet er gitt ved $x \leq 2$, $y \leq 2$ $x + y \geq 2$

Skraver definisjonsområdet i $x - y$ planet. Hvorfor har funksjonen både et globalt maksimum og et globalt minimum i definisjonsområdet.

d) Finn de globale ekstrempunkter og ekstremverdier til $f(x,y)$ når definisjonsområdet er som angitt under c)

Oppgave 4

En bedrift produserer to vareslag som den selger henholdsvis *x* og *y* enheter av.

Profitten er da gitt ved $P(x,y) = \ln(3x) + \ln(4y)$.

En nivåkurve til *P* går gjennom punktet *(10,10)*. I dette punktet har nivå kurven en tangent.

a) Finn stigningstallet til tangenten i dette punktet. (Du behøver ikke å finne ligningen til tangenten.)

b) Forklar at det ikke finnes noen nivåkurve hvor tangenten er horisontal (parallell med x-aksen)

Det viser seg at de fysiske produksjonsforholdene setter grenser på produksjonen slik at $10x+4y^2=1200$

c) Bruk *Lagrangemetoden* for å finne bedriftens maksimale fortjeneste.

Det kan vises at salget utvikler seg over tid slik at

$x=\frac{3}{4}t+5$ og $y=\sqrt{t}$

hvor *t* betegner månedene etter produksjonsstart.

Den *momentane* veksthastigheten for profitten kan finnes ved å beregne *den totale deriverte* $\frac{dP}{dt}$.

d) Hvor stor er den momentane veksthastigheten i måned nr *10?*

Oppgave 5

Inntektene fra en kobbergruve er per idag (t=0) 1.2 milliarder per år. Inntektene ventes å stige jevnt til de har nådd 2.2 milliarder om 5 år.
Vi har da $f(t)=1.2+0.2t$. Her er *f(t)* inntekten (i milliarder) per tidsenhet når tiden måles i år. Lar vi *F(t)* betegne de totale samlede inntektene i intervallet [0,t]

har vi $f(t)=F'(t)$. Det vil si $F(T)=\int_0^T f(t)dt$

a) Beregn $F(5)$, dvs de totale inntektene i 5-årsperioden.

Dersom vi regner med en kontinuerlig forrentning på inntektene på *r* per år, defineres *nåverdien* av inntektsstrømmen slik:

$\int_0^T f(t)\cdot e^{-rt}dt$. Her betegner T slutt-tidspunktet.

b) Beregn nåverdien for 5-årsperioden når $r = 0.1$

Oppgave 6

La $A = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ og $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Finn eventuelle verdier for x slik at

$$A^2 + B^2 = 4I$$

Gitt likningssettet

$$(a+1)x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2$$

$$(a-1)x_1 + ax_2 + x_3 = 1$$

$$(a+1)x_1 - x_3 = 0$$

b) For hvilke verdier av a har likningssystemet eksakt en løsning?

c) Regn ut løsningene i tilfelle $x_2 = x_3$

Fasit til Siv1000 gitt 11.06.02

Oppgave 1

a) $f'(t) = (6-0.6t)e^{0.05t^2-t}$ År 2010

b) Etter 21.34 år er overskuddet 0.

Oppgave 2

b) 17.6534

c) Fondet vil kunne gi 20 utbetalinger på 2 mill. kr

d) Renten må minst være på 11.33%

Oppgave 3

a) $(0,0)$ Sadel, $(-\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ Lok min, $(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$ lok min

d) $f(1,1)=5$ Globalt minimum, $f(2,2)=32$ Globalt maksimum

Oppgave 4

a) $a=-1$ c) $f(80,10)=9.1695$ d) $\frac{dP}{dt}(10)=0.11$

Oppgave 5

a) $F(5)=8.5$ b) 6.5257

Oppgave 6

a) $x=1$ b) $a \neq 0$

$x_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{6}$ $x_2 = \frac{1}{3}$ $x_3 = \frac{1}{3}$ eller

$x_1 = \frac{-\sqrt{3}-1}{6}$ $x_2 = \frac{1}{3}$ $x_3 = \frac{1}{3}$

Handelshøyskolen BI
Institutt for samfunnsøkonomi

Skriftlig eksamen i: SIV 10001 Matematikk F

Studium: Siviløkonomstudiet.

Eksamensdato: 08.08.02, kl. 09-14

Tillatte hjelpemidler: Alle
Antall sider: 4
Innføringsark: Ruteark

NB! Besvarelsen skal tydelig vise fremgangsmåten du har benyttet

Oppgave 1

En eiendom hadde i 1990 en verdi på $1\,500\,000$ kr. Verdien økte med en fast årlig prosent frem til og med år 2000.

Verdien kan da uttrykkes med modellen $V(t) = A \cdot e^{rt}$

(t er tiden i år) Her betyr $t = 0$ 1990 osv

a) Bestem A

b) Bestem r dersom verdien er $2\,200\,000$ kr i år 2000.
Hvilken prosentvise økning per år svarer dette til?

c) En person kjøpte eiendommen i år 2000. For å kjøpe eiendommen hadde han avsatt et fast beløp årlig, første gang 1990 siste gang 1999. Den årlige renten var fast 6% per år. Hvor stort var det årlige beløpet? (Vi regner med at det siste beløpet sto inne *ett* år før han kjøpte eiendommen.)

Oppgave 2

a) Finn verdien av integralene

i) $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$ og ii) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$

b) Bestem t slik at $\int_1^t \frac{t}{x^2} dx = 1$ (Her er $t > 1$ en konstant)

Oppgave 3

To bedrifter, A og B konkurrerer på et marked. De produserer samme produkt, og prisen p som de får for produktet vil være avhengig av samlet tilbud fra de to bedriftene.

$p = 3600 - 2(x + y)$, hvor x og y er produsert mengde fra hhv. bedrift A og B. Kostnadsfunksjonene er hhv.

$C_A(x) = x^2 + 400x + 480\,000$, $x > 0$

$C_B(y) = 2y^2 + 480y + 160\,000$, $y > 0$

a) Anta at A produserer 280 enheter. Vis at profittfunksjonen for B er $\pi(y) = -4y^2 + 2560y - 160\,000$
Hvor mye må B produsere dersom den ønsker å maksimere fortjenesten? Hvor stor blir fortjenesten?

b) A produserer 440 enheter, og B produserer 280 enheter. Vis at ingen av bedriftene har noe å vinne på å endre produksjon, forutsatt at konkurrenten ikke endrer sin.

c) Det kan vises at dersom de to bedriftene samarbeider så vil den samlede fortjenesten være gitt ved

$$f(x, y) = -3x^2 - 4xy - 4y^2 + 3200x + 3120y - 640\,000$$

Hvor mye må de to bedriftene produsere dersom de ønsker å maksimere den samlede fortjenesten?

Oppgave 4

Gitt funksjonen $f(x,y) = x + 4y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

a) Funksjonen har 4 stasjonære punkter. Finn disse og klassifiser dem.

b) Forklar at ingen av punktene er *globale* ekstrempunkter.

Vi lar nå både x og y være positive. Vi innfører så bibetingelsen $2x + 8y = 3$

c) Oppgaven blir nå å maksimere/minimere $f(x,y)$ ved den gitte bibetingelsen. Du finner *ett* punkt som tilfredsstiller Lagrangebetingelsene. Dette er et minimumspunkt. Finn punktet.
Vis at $f(x,y)$ kan vokse over alle grenser innenfor den gitte bibetingelsen.

Oppgave 5

a) Løs likningssettet enten ved Cramers regel eller ved matriseinvertering:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad &= a^2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= a \\ 3x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

b) Bestem den verdien av a som gjør verdien av $x_1 + x_2 + x_3$ minst mulig.

Gitt matrisen $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 12 \\ 0 & x & -10 \end{pmatrix}$

c) Beregn A^2 (dvs. $A \cdot A$)

d) Bestem x slik at $A = 4 \cdot A^{-1}$

Oppgave 6

I 1998 ble det undersøkt hva ansatte langtidsutdannede tjente i gjennomsnitt i året i privat virksomhet og i staten. Undersøkelsen gjaldt ansatte i aldersgruppen 22 til 67 år.
Gjennomsnittsinntekten for de to gruppene kan med god tilnærming skrives:

$$p(t) = 2 \cdot 10^4 (-9.50 \cdot (\ln t)^2 + 75.6 \cdot \ln t - 130)$$
$$s(t) = 2 \cdot 10^4 (-1.96 \cdot (\ln t)^2 + 20.3 \cdot \ln t - 32.7)$$

(Begge modellene gjelder for $t \in [22,67\rangle$)

$p(t)$ er inntekten til den privatansatte og $s(t)$ inntekten til den statsansatte. t er personens alder.

a) Skisser grafene til $p(t)$ og $s(t)$ i samme koordinatsystem.
(Bruk gjerne grafisk kalkulator)

b) Vis at forskjellen i årsinntekt mellom privatansatt og statsansatt blir:

$$f(t) = 2 \cdot 10^4 (-7.54 \cdot (\ln t)^2 + 55.3 \cdot \ln t - 97.3)$$

c) Ved hvilken alder er forskjellen størst.

Fasit til Siv1000 gitt 08.08.02

Oppgave 1

a) $A = 1\,500\,000$

b) $r = 0.0383$ $e^r = e^{0.0383} = 1.039$ Den prosentvise økningen per år er 3.9% c) $K = 157461.80$

Oppgave 2

a) i) $\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{2}$ ii) $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = 1$ b) $t = 2$

Oppgave 3

a) $y = 320$ $\pi_B(320) = 249600$ c) $x = 410$ $y = 185$

Oppgave 4

a) $(-1,-\frac{1}{2})$ lok maks, $(1,\frac{1}{2})$ lok min, $(1,-\frac{1}{2})$ og $(-1,\frac{1}{2})$ sadelpunkter

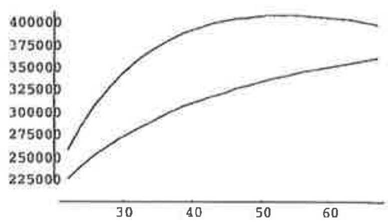
c) $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$

Oppgave 5

a) $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a^2+a+1 \\ 3a^2-a-1 \\ 9a^2-3a-4 \end{pmatrix}$ b) $a = \frac{3}{20}$

c) $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 100+12x & 0 \\ 0 & 0 & 12x+100 \end{pmatrix}$ d) $x = -8$

Oppgave 6

a) 

c) ca 39 år.

Handelshøyskolen BI
Institutt for samfunnsøkonomi

Skriftlig eksamen i:	SIV 10001 Matematikk LF
Studium:	Siviløkonomstudiet.
Eksamensdato:	13.01.03, kl. 15-20
Tillatte hjelpemidler:	Alle
Antall sider:	4
Innføringsark:	Ruteark

NB! Besvarelsen skal tydelig vise fremgangsmåten du har benyttet

Oppgave 1

Funksjonen $f(x,y)=x^3+y^3-9xy+1$ er definert for alle x og y.

a) Bestem funksjonens stasjonære punkter og klassifiser disse. Forklar at det ikke finnes *globale* ekstrempunkter.

b) Vi begrenser nå definisjonsområdet til $0 \le x \le 4$ *og* $0 \le y \le 4$. Skravér definisjonsområdet i xy-planet, og finn funksjonens *globale* ekstrempunkter.

Oppgave 2

a) Grafen til funksjonen $f(x)=\dfrac{1}{x}$, x-aksen og de to x-verdiene $x=1$ og $x=5$ avgrenser et areal. Finn ved regning det *eksakte* uttrykket for dette arealet.

b) Vi bytter nå ut x-verdien 5 med $x=k$. i punkt a) Bestem ved regning k slik at arealet nå blir dobbelt så stort som i a).

c) Du skal bestemme funksjonen $g(x)$ når du får følgende opplysninger:

i) Grafen til $g(x)$ går gjennom punktet $(1,2)$
ii) I dette punktet har den deriverte verdien 5
iii) $g''(x) = 6x - \frac{1}{x^2}$

Oppgave 3

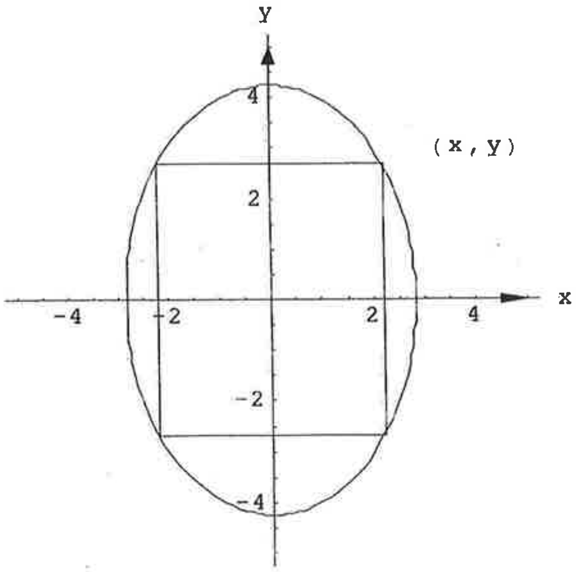
Du skal selge en tomt som du mener er verdt 1 million kr. Du får tre alternative tilbud:

i) 1 million kr straks
ii) 500 000 kr straks og 600 000 kr om 5 år
iii) 400 000 kr straks og deretter 140 000 kr årlig 5 ganger første gang om ett år.

I hele oppgaven regner vi med en rente på 5% per år. Hvilket tilbud er best for deg som selger? (Du skal ikke spekulere i forandring i kroneverdien eller i om din personlige økonomi forandres underveis.)

Oppgave 4

$g(x,y) = 9x^2 + 4y^2 = 72$ fremstiller en ellipse som vist på figuren nedenfor. Et rektangel med sidekanter parallelle med koordinataksene er innskrevet i ellipsen (Se fig.). Kall koordinatene til hjørnepunktet som ligger i første kvadrant for (x,y)



a) Uttrykk rektangelets areal $A(x,y)$ med hjelp av x og y

b) Finn de verdiene av x og y som maksimerer arealet av rektanglet. Hvor stort blir arealet? Benytt Lagrange-multiplikatorer.

c) Vis at punktet $(\frac{8}{3},\sqrt{2})$ ligger på ellipsen.
Finn stigningstallet for tangenten i dette punktet.

d) Ellipsen har to tangenter med stigningstall $-\frac{3}{2}$
Finn tangeringspunktenes koordinater.

Oppgave 5

Gitt matrisene $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Løs likningen $AX=B$ ved hjelp av matriseinvertering.

b) Løs likningen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) Bestem den verdien av a der $a \geq 0$ som gjør verdien av produktet $x_1 x_2 x_3$ minst mulig.
Her er x_1 , x_2 og x_3 løsningene av likningen i b)

d) D er en 3×3 matrise. Bestem D når $ADA = C$

hvor $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Sensorveiledning i SIV 1000 gitt 13.01.03.

Oppgave 1

$f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 1$

a) $f'_x = 3x^2 - 9y$ $\quad f'_y = 3y^2 - 9x$

I et stasjonært punkt må

I $3x^2 - 9y = 0$ og II $3y^2 - 9x = 0$

Fra I følger at $y = \frac{1}{3}x^2$ setter vi dette inn i II får vi

$3 \cdot (\frac{1}{3}x^2)^2 - 9x = \frac{1}{3}x^4 - 9x = \frac{1}{3}x(x^3 - 27) = 0$

Herav følger $x = 0$ eller $x^3 = 27$ det vil si

$x = 0$ eller $x = 3$. Er $x = 0$ så er $y = \frac{1}{3}x^2 = \frac{1}{3} \cdot 0^2 = 0$

Er $x = 3$ så er $y = \frac{1}{3}x^2 = \frac{1}{3} \cdot 3^2 = 3$.

Stasjonære punkter $(0,0)$ og $(3,3)$

$A = f''_{xx} = 6x$ $\quad B = f''_{xy} = -9$ $\quad C = f''_{yy} = 6y$

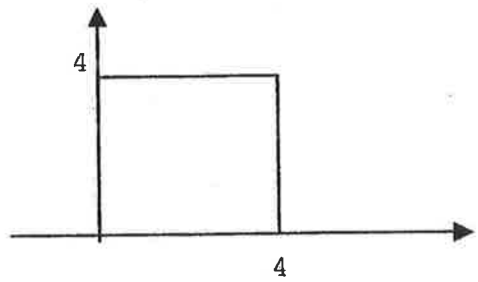
	A	B	C	$AC - B^2$	
$(0,0)$	0	-9	0	-81	Sadel punkt
$(3,3)$	18	-9	18	243	lok. minimumspunkt

Nå er $f(x,0) = x^3 + 1$

Da $\lim_{x\to-\infty}(x^3 + 1) = -\infty$ har $f(x,y)$ ikke noe globalt minimum.

Da $\lim_{x\to\infty}(x^3 + 1) = \infty$ har $f(x,y)$ ikke noe globalt maksimum.

b)



Randa $x=0$ $f(0,y)=y^3+1$ $f'_y(0,y)=3y^2=0$ $y=0$

Randa $y=0$ $f(x,0)=x^3+1$ $f'_x(x,0)=3x^2=0$ $x=0$

Randa $x=4$ $f(4,y)=y^3-36y+65$

$f'_y(4,y)=3y^2-36=0$ $y=\pm\sqrt{12}$ Kun $(4,\sqrt{12})$ ligger i D_f

Randa $y=4$ $f(x,4)=x^3-36x+65$

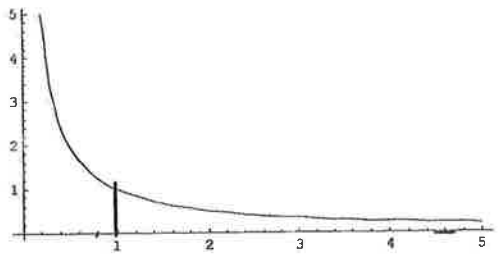
$f'_x(x,4)=3x^2-36=0$ $x=\pm\sqrt{12}$ Kun $(\sqrt{12},4)$ ligger i D_f

$(3,3)$ er et lokalt minimum i det indre av D_f.

$f(0,0)=1$ $f(0,4)=f(4,0)=65$ Globalt maksimum
$f(3,3)=-26$ Globalt minimum.
$f(4,\sqrt{12})=f(\sqrt{12},4)\approx-18.14$ $f(4,4)=-15$

Oppgave 2

a)



Arealet er $\int_1^5 \frac{1}{x}dx = [\ln|x|]_1^5 = \ln 5 - \ln 1 = \ln 5$

b) $\int_1^k \frac{1}{x}dx = [\ln|x|]_1^k = \ln k - \ln 1 = \ln k$ Skal dette være det dobbelte av arealet i a) må $\ln k = 2\ln 5 = \ln 5^2$ Dette gir $k = 5^2 = 25$.

c) Da $g''(x) = 6x - \frac{1}{x^2}$ så må

$$g'(x) = \int(6x - \frac{1}{x^2})dx = \int(6x - x^{-2})dx = 6\cdot\frac{x^2}{2} - (-1)x^{-1} + C = 3x^2 + \frac{1}{x} + C$$

Da $g'(1) = 5$ er $3\cdot 1^2 + \frac{1}{1} + C = 5$ Herav følger $C = 1$

Det vil si $g'(x) = 3x^2 + \frac{1}{x} + 1$ Da er

$g(x) = \int(3x^2 + \frac{1}{x} + 1)dx = x^3 + \ln|x| + x + C$ Skal grafen gå gjennom $(1,2)$ må $g(1) = 1 + \ln 1 + 1 + C = 2$ Dette gir $C = 0$

Svar: $g(x) = x^3 + \ln|x| + x$

Oppgave 3

i) Nåverdi 1 million

ii) Nåverdi $500\,000 + \frac{600\,000}{1.05^5} = 970115.70$

iii) Nåverdi $400\,000 + 140\,000\frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n \cdot r} =$

$$400\,000 + 140\,000\frac{1.05^5 - 1}{1.05^5 \cdot 0.05} = 1006126.73$$

Det vil lønne seg å velge tilbud iii) da dette har den høyeste nåverdien.

Oppgave 4

a) Arealet av rektanglet er $A(x,y) = 4xy$

b) Vi ønsker å maksimere $A(x,y)$ under bibetingelsen

$g(x,y) = 9x^2 + 4y^2 = 72$

$F(x,y) = A(x,y) - \lambda(g(x,y) - C) = 4xy - \lambda(9x^2 + 4y^2 - 72)$

$F'_x = 4y - \lambda \cdot 18x$ $\quad F'_y = 4x - \lambda \cdot 8y$

Skal $F'_x = 0$ og $F'_y = 0$ så må

I $4y - 18\lambda x = 0$ og II $4x - 8\lambda y = 0$

Ganger vi den første likningen med $4y$ og den andre med $9x$ får vi.

$16y^2 - 72xy\lambda = 0$ og $36x^2 - 72xy\lambda = 0$

Herav følger $16y^2 = 36x^2$ eller $4y^2 = 9x^2$

Setter vi dette inn i bibetingelsen $9x^2 + 4y^2 = 72$ får vi:

$9x^2 + 9x^2 = 18x^2 = 72$ $\quad x^2 = 4$ $\quad x = 2$ $\quad 4y^2 = 9 \cdot 4 = 36$

$y^2 = 9$ $\quad y = 3$.

Svar vi må velge $x = 2$ og $y = 3$

Arealet av rektangelet blir $A(2,3) = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$

c) Da $g(\frac{8}{3}, \sqrt{2}) = 9 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^2 + 4(\sqrt{2})^2 = 64 + 8 = 72$ ligger punktet på ellipsen.

$y' = -\frac{g'_x}{g'_y} = -\frac{18x}{8y}$ Stigningstallet til tangenten i punktet

er $a = -\frac{18 \cdot \frac{8}{3}}{8\sqrt{2}} = -\frac{6}{\sqrt{2}} = -3\sqrt{2} \approx -4.24$

d) Skal stigningstallet være $-\frac{3}{2}$ må $-\frac{9x}{4y}=-\frac{3}{2}$

Dette gir $18x=12y$ $\quad y=\frac{3}{2}x$

Settes dette inn i likningen $9x^2+4y^2=27$

får vi $9x^2+4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2x^2=9x^2+9x^2=18x^2=72$

$x^2=4$ $\quad x=-2$ eller $x=2$

For $x=-2$ er $y=-3$. For $x=2$ er $y=3$

De to punktene har derfor koordinater $(-2,-3)$ og $(2,3)$

Oppgave 5

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\1&4&3\end{pmatrix}\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}$$

a) Likningen $AX=B$ har løsningen $X=A^{-1}B$

La oss først beregne A^{-1}

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&0\\0&1&1\\1&4&3\end{vmatrix}=3+2+0-4-0-0=1\qquad A'=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&4\\0&1&3\end{pmatrix}$$

$$A_{adj}=\begin{pmatrix}-1&-6&2\\1&3&-1\\-1&-2&1\end{pmatrix}\qquad A^{-1}=\frac{1}{|A|}A_{adj}=\begin{pmatrix}-1&-6&2\\1&3&-1\\-1&-2&1\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}-1&-6&2\\1&3&-1\\-1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\\-3\end{pmatrix}$$

b) $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+2 \\ a-1 \\ -a+1 \end{pmatrix}$

c) $f(a) = x_1x_2x_3 = (-a+2)(a-1)(-a+1) = a^3 - 4a^2 + 5a - 2$

$f'(a) = 3a^2 - 8a + 5$. Løser vi likningen $3a^2 - 8a + 5 = 0$ får vi $a = 1$ eller $a = \dfrac{5}{3}$ Vi kan derfor skrive

$f'(a) = 3(a-1)(a - \dfrac{5}{3})$

Vi studerer kun de verdiene av a der $a \geq 0$

	0		1		$\frac{5}{3}$	
$3(a-1)$	- - -	- - -	0	———	———	———
$a - \frac{5}{3}$	- - -	- - -	- - -	- - -	0	———
$f'(a)$	———	———	0	- - -	0	———

Ut i fra fortegnet for $f'(a)$ ser vi at mulige globale minimumspunkter er $a = 0$ og $a = \dfrac{5}{3}$

$f(0) = -2$ $\quad f(\dfrac{5}{3}) = -0.1481$ $\quad a = 0$ er derfor den verdien av a som minimerer $x_1x_2x_3$

d) Venstremultipliserer vi likningen $ADA = C$ med A^{-1} får vi $A^{-1}ADA = A^{-1}C$ $\quad DA = A^{-1}C$ Høyremultipliserer vi denne likningen med A^{-1} får vi
$DAA^{-1} = A^{-1}CA^{-1}$

$$D = A^{-1}CA^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -6 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -7 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -6 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 38 & -12 \\ -3 & -22 & 7 \\ 2 & 16 & -5 \end{pmatrix}$$

Handelshøyskolen BI
Institutt for samfunnsøkonomi

Skriftlig eksamen i: SIV 10001 Matematikk LF

Studium: Siviløkonomstudiet.

Eksamensdato: 20.06.03, kl. 09-14

Tillatte hjelpemidler: Alle
Antall sider: 4
Innføringsark: Ruteark

NB! Besvarelsen skal tydelig vise fremgangsmåten du har benyttet

Oppgave 1

Gitt ligningssettet

$$\begin{aligned} ax_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

a) Bestem determinanten til koeffisientmatrisen

b) For hvilken verdi av a blir $x_1 = \frac{1}{2}$?

Gitt matrisene

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ og } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Bestem en 3x3 matrise X slik at $B + XA^{-1} = A^{-1}$

Oppgave 2

Gitt funksjonen $f(x, y) = x^2 y^2 - x^2 - 4y^2$

a) Klassifiser funksjonens stasjonære punkter.

b) Bestem funksjonens *globale* ekstremalpunkter når vi lar funksjonen være definert i området gitt ved $0 \leq x \leq 2$ *og* $0 \leq y \leq x$.

Oppgave 3

Sett opp Lagrangefunksjonen for problemet : minimer $f(x, y) = e^{2x} + e^y$ når $e^x \cdot e^y = 2$.
Finn minimumspunktet og minimumsverdien ved regning.

Oppgave 4

To bedrifter A og B sliter med utslipp av giftige gasser. I år 2000 var utslippet fra A 200 tonn og fra B 100 tonn. Bedrift A vil klare å redusere utslippet med 5% per år de neste årene. Bedrift B (som er har gammelt produksjonsutstyr) vil øke utslippet med 5% per år.

a) Hvor stort er det årlige utslippet fra hver av bedriftene i år 2010 ?

b) Finn ved regning i hvilket år utslippet fra de to bedriftene er like stort.

c) Regn ut hvor stort det totale utslippet fra og med år 2000 til og med år 2012 er for hver av de to bedriftene.

d) Vis ved regning at bedrift A aldri vil få et totalt utslipp på mer enn 4000 tonn.

Oppgave 5

En radioaktiv isotop har en halveringstid på 704 millioner år.
Dersom K_0 en mengden av dette isotopet ved tidspunktet $t = 0$ så vil mengden ved tidspunktet t være gitt ved $K = K_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{704}}$

Her er t regnet i millioner år. Anta at $K_0 = 1000$.

a) Finn ved regning hvor lang tid går det før $K = 250$?

b) Finn ved regning hvor lang tid går det før $K = 100$?

c) For en annen radioaktivt isotop vet vi at det går 18900 år før mengden er redusert til 10% av det opprinnelige. Finn halveringstiden ved regning.

Oppgave 6

En bedrift driver en urangruve.
Produksjonsintensiteten i gruven er gitt ved:

$f(x) = 30\sqrt{x} - 10x$ $\quad 0 \le x \le 9$ Her er x antall år etter oppstart.

a) Vis ved regning at produksjonsintensiteten er størst når $x = 2.25$ og skisser grafen til $f(x)$. (Bruk gjerne en grafisk kalkulator).

b) Den totale produksjonen over en 9 års periode vil da være gitt ved:

$$\int_0^9 f(x)dx .$$

Finn den totale produksjonen ved regning.

Vi skal nå regne med at produksjonsintensiteten for urangruven er gitt ved:

$g(x) = \frac{810}{a^4}(a\sqrt{x} - x)$ $\quad 0 \le x \le a^2$ Her er $a > 0$ en konstant.

c) Den totale produksjonen vil nå være gitt ved: $\int_0^{a^2} g(x)dx$

Finn den totale produksjonen.

Prisen på uran som funksjon av tiden $p(x) = 4\sqrt{x} - x$

d) Anta nå at $a = 3$. Da vil bedriftens inntekt være gitt ved $\int_0^9 p(x)g(x)dx$

Finn denne inntekten.

Sensorveiledning i Siv 1000 gitt 20.06.03

Oppgave1

$$\begin{aligned} ax_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

a) $|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 8a + 18 + 15 - 9a - 10 - 24 = -a - 1$

b) $|B_1| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 3 + 0 - 0 - 0 - 4 = -1$

$x_1 = \dfrac{|B_1|}{|A|} = \dfrac{-1}{-a-1} = \dfrac{1}{a+1}$ Skal $x_1 = \dfrac{1}{2}$ må $\dfrac{1}{a+1} = \dfrac{1}{2}$

$a = 1$

c) $B + XA^{-1} = A^{-1}$
Høyre-multipliserer jeg likningen med A får jeg.

$BA + XA^{-1}A = A^{-1}A$ $BA + X = I$

$$X = I - BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -6 & -2 & -2 \\ -5 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Oppgave 2

a) $f(x,y)=x^2y^2-x^2-4y^2$

$f'_x=2xy^2-2x=2x(y^2-1)$ $\qquad$ $f'_y=x^2\cdot 2y-8y=2y(x^2-4)$

Skal $f'_x=0$ og $f'_y=0$ må

$2x(y^2-1)=0$ $\qquad$ og $\qquad$ $2y(x^2-4)=0$

($x=0$ eller $y=-1$ eller $y=1$) og

($y=0$ eller $x=-2$ eller $x=2$)

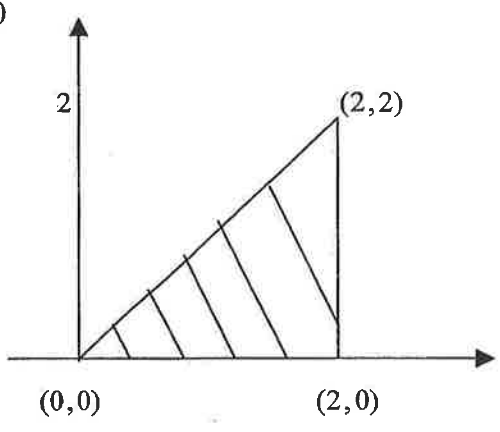
De mulige kombinasjoner gir følgende stasjonære punkter.

$(0,0)$ $(-2,-1)$ $(-2,1)$ $(2,-1)$ og $(2,1)$

$A=f''_{xx}=2y^2-2$ $\qquad$ $B=f''_{xy}=4xy$ $\qquad$ $C=f''_{yy}=2x^2-8$

	A	B	C	$AC-B^2$	
$(0,0)$	-2	0	-8	16	lok maksimum
$(-2,-1)$	0	8	0	-64	Sadel
$(-2,1)$	0	-8	0	-64	Sadel
$(2,-1)$	0	-8	0	-64	Sadel
$(2,1)$	0	8	0	-64	Sadel

b)



Ingen av de stasjonære punktene ligger i det indre av definisjonsområdet.

Randa $x=2$ $f(2,y)=-4$

Randa $y=0$ $f(x,0)=-x^2$ $f'_x(x,0)=-2x=0$ $x=0$

randa $y=x$ $h(x)=f(x,x)=x^4-5x^2$

$h'(x)=4x^3-10x=4x(x^2-\frac{5}{2})=0$

$x=0$ eller $x=-\sqrt{\frac{5}{2}}$ eller $x=\sqrt{\frac{5}{2}}$

Bemerk: her ligger $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}},-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ utenfor definisjonsområdet til $f(x,y)$.

Mulige ekstrempunkter er derfor $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$,

(2,y) der $0\le y\le 2$ og $\left(\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$. Legg merke til at både $(2,0)$, $(2,2)$ er innbefattet blant punktene (2,y) der $0\le y\le 2$

$f(0,0)=0$

$$f\left(\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{5}{2}}\right)=\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^4-5\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2=\frac{25}{4}-\frac{25}{2}=-\frac{25}{4}=-6.25$$

$f(2,y)$=-4 $\quad 0\le y\le 2$

Konklusjon: $(0,0)$ er et globalt maksimumspunkt.

$\left(\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ er et globalt minimumspunkt.

Oppgave 3

$F(x,y)=e^{2x}+e^y-\lambda(e^x\cdot e^y)$

$F'_x=e^{2x}\cdot 2-\lambda(e^x\cdot e^y)=0$ $\qquad 2e^{2x}=\lambda(e^x\cdot e^y)$

$F'_x=e^y-\lambda(e^x\cdot e^y)=0$ $\qquad e^y=\lambda(e^x\cdot e^y)$

Herav følger $e^y = 2e^{2x}$ Settes dette inn i bibetingelsen $e^x \cdot e^y = 2$

får vi. $e^x \cdot 2e^{2x} = 2$ $e^{3x} = 1$ $3x = \ln 1 = 0$ $x = 0$

Er $x = 0$ så er $e^y = 2e^{2x} = 2e^0 = 2$ Det vil si $y = \ln 2$

$f(0, \ln 2) = e^0 + e^{\ln 2} = 1 + 2 = 3$

Oppgave 4

La t være antall år etter år 2000

Utslippet i år t for bedrift A er $f(t) = 200 \cdot 0.95^t$

Utslippet i år t for bedrift B er $g(t) = 100 \cdot 1.15^t$

a) Utslippet i år 2010 for bedrift A er $f(10) = 200 \cdot 0.95^{10} = 119.7474$
Utslippet i år 2010 for bedrift B er $g(10) = 100 \cdot 1.05^{10} = 162.8895$

b) $100 \cdot 1.05^t = 200 \cdot 0.95^t$. $\frac{1.05^t}{0.95^t} = \left(\frac{1.05}{0.95}\right)^t = 2$

$t \ln\left(\frac{1.05}{0.95}\right) = \ln 2$ $t = \frac{\ln 2}{\ln\left(\frac{1.05}{0.95}\right)} = 6.9257$ Det vil si etter 7 år

c) Totalt utslipp til og med år 12 for bedrift A er:

$$K_A = a + ak + ak^2 + ...ak^t = a\frac{1-k^{t+1}}{1-k} = 200 \cdot \frac{1-0.95^{12+1}}{1-0.95} = 4000 \cdot (1 - 0.95^{13}) = 1946.6317$$

Totalt utslipp til og med år 12 for bedrift B er:

$$K_B = a + ak + ak^2 + ...ak^t = a\frac{1-k^{t+1}}{1-k} = 100\cdot\frac{1-1.05^{12+1}}{1-1.05} = 2000\cdot(1.05^{13}-1) = 1771.2983$$

d) Etter t år er utslippet fra bedrift A

$$K_A = 4000(1-0.95^{t+1}) < 4000(1-0) = 4000$$

Oppgave 5

a) $K = 1000\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{704}} = 250$ Da må $1000\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{704}} = 250$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{704}} = 0.250$ $\quad \ln(0.5)^{\frac{t}{704}} = \ln(0.25)$

$\frac{t}{704}\ln(0.5) = \ln(0.25)$ $\quad t = 704\cdot\frac{\ln(0.25)}{\ln(0.5)} = 704\cdot 2 = 1408$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{704}} = 0.1$ $\quad \frac{t}{704}\ln(0.5) = \ln(0.1)$ $\quad t = 704\cdot\frac{\ln(0.1)}{\ln(0.5)} = 2338.63$

c) La k være halveringstiden i antall år.

Da er $h(t) = K_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{k}}$ Vi har fått opplyst at

$h(18900) = K_0(0.5)^{\frac{18900}{k}} = K_0\cdot 0.1$ $\quad \frac{18900}{k}\cdot\ln(0.5) = \ln(0.1)$

$18900 \cdot \ln(0.5) = \ln(0.1) \cdot k \qquad\qquad k = 18900 \cdot \dfrac{\ln(0.5)}{\ln(0.1)} = 5689$

Oppgave 6

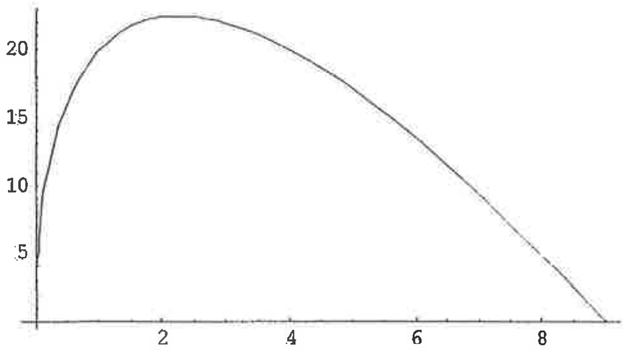
a) $\quad f(x) = 30\sqrt{x} - 10x$

$$f'(x) = 30 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 10 = \frac{15}{\sqrt{x}} - 10 = \frac{15 - 10\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

Skal $f'(x) = 0$ må $\quad 10\sqrt{x} = 15 \qquad \sqrt{x} = 1.5 \qquad x = 2.25$

	0		2.25	
$15 - 10\sqrt{x}$		————	0	- - - - - - - -
$\sqrt{x}$	x	————	————	————
$f'(x)$		————	0	- - - - - - - -

Vi ser at $x = 2.25$ er et maksimumspunkt.



b) Finn den totale produksjonen er

$$\int_0^9 f(x)dx = \int_0^9 (30\sqrt{x} - 10x)dx = \int_0^9 (30x^{\frac{1}{2}} - 10x)dx = \left[30\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 10\cdot\frac{1}{2}x^2\right]_0^9 = .$$

$$\left[20x^{\frac{3}{2}} - 5x^2\right]_0^9 = 20\cdot 27 - 5\cdot 81 = 135$$

c) Den totale produksjonen vil nå være gitt ved:

$$\int_0^{a^2} g(x)dx = \int_0^{a^2} \frac{810}{a^4}(a\sqrt{x} - x)dx = \frac{810}{a^4}\int_0^{a^2}(ax^{\frac{1}{2}} - x)dx = \frac{810}{a^4}\left[a\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^{a^2} =$$

$$\frac{810}{a^4}\left(\frac{2}{3}\cdot a^4 - \frac{1}{2}\cdot a^4\right) = 135$$

$$p(x) = 4\sqrt{x} - x$$

d) Setter vi inn $a = 3$ vil bedriftens inntekt være

$$\int_0^{a^2} p(x)g(x)dx = \int_0^9 (4\sqrt{x} - x)\frac{810}{81}(3\sqrt{x} - x)dx = 10\int_0^9 (12x - 4\sqrt{x}\cdot x - 3\sqrt{x}\cdot x + x^2)dx =$$

$$10\int_0^9 (12x - 7x^{\frac{3}{2}} + x^2)dx = 10\left[6x^2 - 7\cdot\frac{2}{5}\cdot x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}x^3\right]_0^9 =$$

$$10(486 - \frac{3402}{5} + 243) = 486$$

Handelshøyskolen BI
Institutt for samfunnsøkonomi

Skriftlig eksamen i: MET 2210 Matematikk F

Studium: Siviløkonomstudiet.

Eksamensdato: 04.12.03, kl. 09-14

Tillatte hjelpemidler: Alle
Antall sider: 4
Innføringsark: Ruteark

NB! Besvarelsen skal tydelig vise fremgangsmåten du har benyttet

Oppgave 1

a) La $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-4}$ Løs ulikheten $f(x)\geq 0$

Finn ved regning arealet avgrenset av grafen til $f(x)$, x-aksen og de rette linjene $x=3$ og $x=4$.

b) Minimer $f(x,y)=2x^2+y^2$ under bibetingelsen $g(x,y)=y-x^2+2=0$

Oppgave 2

Gitt ligningssettet

$$x_1+2x_2+3x_3=4$$
$$3x_1+ax_2+x_3=12$$
$$2x_1+x_2+3x_3=5$$

a) Hvilke verdier må a ha dersom ligninssettet skal ha entydige løsninger?

b) Hvilke verdier av a gjør $x_1 \le 2x_2$?

Gitt matrisene $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ og $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) Løs ligningen $AX=X+B$ ved å bruke matriseinversjon.

OPPGAVE 3

For inntekter fra 100 000 kr til 300 000 kr kunne for noen år siden inntektsfordelingen hos skattebetalerne i en storby uttrykkes ved funksjonen

$$f(r) = \frac{A}{r^3}$$

Her betyr r inntekten målt i 100 000 kr, slik at funksjonen er definert for $r \in [1,3]$.

Det var 120 000 skatteytere i denne gruppen.

a) Vis at $A = 2{,}7 \cdot 10^5$

b Hvor mye tjente alle til sammen, og hvor stor var gjennomsnittsinntekten?

c) Halvparten av gruppen tjente mindre enn et visst beløp. Finn dette beløpet.

De "rikeste" tjente til sammen 3 milliarder kroner.

d) Hvor mye måtte en person (minst) tjene for å være en av de "rike"?

Oppgave 4

I hele denne oppgaven er renten fast 4% per år.
En person låner 170 000 kr. Lånet skal tilbakebetales etter annuitetsprinsippet med et fast årlig beløp. Første beløp betales ett år etter låneopptak, siste beløp 10 år etter låneopptak.

a) Hvor store er de årlige innbetalingene?

b) Hvor mye betales i renter og hvor mye betales i avdrag det første året?

c) Anta at du nettopp har betalt den 5. innbetalingen. Hva er nåverdien på dette tidspunktet av de fem gjenstående innbetalingene?

d) Like før du skal betale beløp nummer 6 ber du om utsettelse av betalingen. Banken lar deg vente i 3 år før du fortsetter med innbetalingene. Hvor store blir hvert av de resterende 5 beløpene?

Oppgave 5

Gitt funksjonen $f(x,y) = x^4 + y^2 + 4x^2y - 12y$.

a) $f(x,y)$ har de stasjonære punktene $(0,6)$, $(2,-2)$ og $(-2,-2)$.
Vis dette ved å løse $f'_x = 0$ og $f'_y = 0$
Klassifiser de stasjonære punktene.

b) Finn likningen for tangenten til nivålinjen

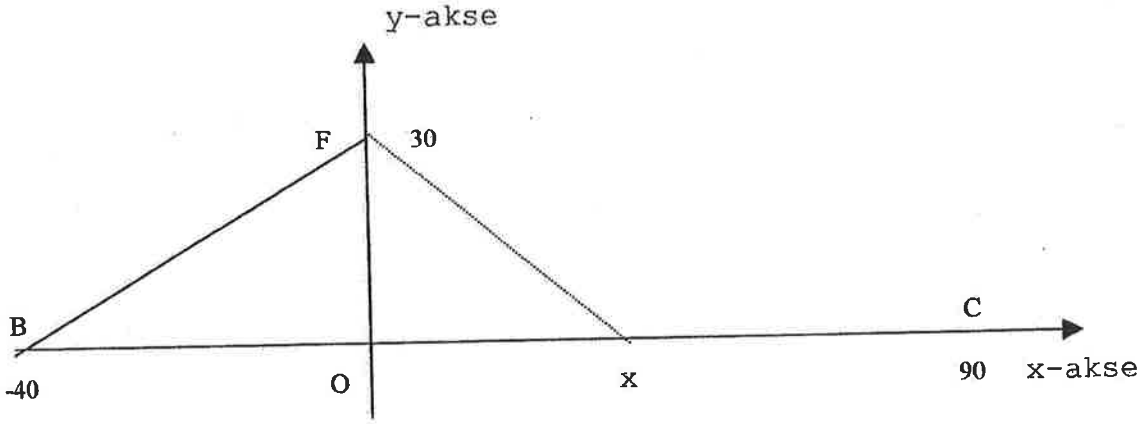
$f(x,y) = 21$ i punktet $(2,1)$.

c) Vi skal heretter anta at $f(x,y)$ er definert i området gitt ved:

$0 \le x \le 1$ og $0 \le y \le 1$
Skraver definisjonsområdet i $x-y$ planet.

Finn de globale ekstrempunktene til $f(x,y)$.

Oppgave 6



Figuren viser en jernbane som ligger langs x-aksen. *B* er en stasjon som ligger 40 km til venstre for origo. *C* er en by som ligger 90 km til høyre for origo. *F* er en fabrikk som ligger på y-aksen 30 km fra origo. Fabrikken produserer maskiner som skal fraktes fra *F* til *C*. Transporten foregår med bil fra *F* til *B* og koster 200 kr/km. Togtransporten fra *B* til *C* koster 150 kr/km.

a) Hvor mye koster det å frakte en maskin fra fabrikken *F* til byen *C* ?

For å få mindre transportutgifter planlegger fabrikken å bygge en stasjon mellom *B* og *C*. Stasjonen vil ligge x km fra origo. (Se fig.)

b) Vis at transportutgiftene nå blir

$$K(x) - 200\sqrt{x^2+900}+150(90-x)$$

c) Finn ved regning den verdien av x som gir de laveste transportutgiftene. (Det er ikke nødvendig å vise at det er et minimumspunkt du har funnet)

Fasit til MET2210 gitt 04.12.03

1 a) $f(x) \geq 0$ når $-2 < x \leq 0$ eller $x > 2$
Arealet er $\ln(12)-\ln(5) \approx 0.8755$

b) $f(-1,-1) = 3$ $f(1,-1) = 3$ Globale minimumspunkter.

2 a) For at likningssettet skal ha entydige løsninger så må $a \neq -2$.

b) Skal $x_1 \leq 2x_2$ så må $-2 < a \leq 6$

c) $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0.25 \end{pmatrix}$

3 b) Totalinntekten til gruppen er: $1.8 \cdot 10^5$ (hundretusen) kr.
Gjennomsnittsinntekten er $M = 1.5$ (hundretusen) kr

c) $x = 1.3416 \cdot 10^5$ kr. d) $x = 2.25 \cdot 10^5$ kr.

4 a) 20959.46

b) Renter det første året er 6800
Avdrag det første året er 14159.46.

c) 93307.79 d) 23576.54

5 a)

	A	B	C	$AC-B^2$	
$(-2,-2)$	32	-16	2	-192	sadel
$(2,-2)$	32	16	2	-192	sadel
$(0,6)$	48	0	2	96	lok. min

b) $y = -8x + 17$

c) $f(1,0) = 1$ Globalt maksimum.
$f(0,1) = -11$ Globalt minimum.

6 a) 29500 c) $x = 34$

Handelshøyskolen BI
Institutt for samfunnsøkonomi

Skriftlig eksamen i: MET 2210 Matematikk F

Studium: Siviløkonomstudiet.

Eksamensdato: 10.06.04, kl. 09-14

Tillatte hjelpemidler: Alle
Antall sider: 3
Innføringsark: Ruteark

NB! Besvarelsen skal tydelig vise fremgangsmåten du har benyttet

Oppgave 1

Gitt ligningssettet
$$\begin{aligned} ax_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + ax_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

a) Finn ved regning hvilke a-verdier som ikke gir entydige løsninger.

b) Det finnes to verdier av a som gjør at $x_1 = -\frac{5}{3}$. Hvilke?

Gitt matrisene $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ og $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) Finn to matriser X og Y slik at $XA = B$ og $YB = A$

d) Beregn XY. Vis at resultatet blir det samme dersom A og B var hvilke som helst inverterbare 3×3-matriser .

Oppgave 2

Finn maksimum og minimum til funksjonen $f(x,y)=\frac{1}{3}x^3+y$ under bibetingelsen $g(x,y)=x^2+y^2=1$ (tips: benytt Lagrangemultiplikatorer)

Oppgave 3

Gitt funksjonen $f(x,y)=x^2y+xy^2-2xy$, definert for alle (x,y)

a) På nivålinjen $f(x,y)=2$ ligger punktet $(1,2)$
Bestem ved regning likningen for tangenten i dette punktet.

b) Vis ved regning at funksjonen har følgende stasjonære punkter:

(0,0), (0,2), (2,0) *og* $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$, og klassifiser disse.

c) Skravér i xy-planet området bestemt ved : $x+y\geq 1$ *og* $x\leq 1$ *og* $y\leq 1$

d) Finn funksjonens globale ekstrempunkter når definisjonsområdet er gitt ved uttrykket i c).

Oppgave 4

En bedrift hadde i år 2003 et uønsket utslipp på 400 tonn gasser.
De regner med å øke utslippet med 4% per år frem til og med år 2015.

a) Hvor mange tonn gasser blir sluppet ut i alt i denne perioden dersom prognosen holder?

Fra og med 2010 går utslippet ned med 2% per år på grunn av nytt produksjonsutstyr.

b) Hvor mange tonn blir nå det totale utslippet i perioden 2003-2015?

Oppgave 5

Gitt funksjonen $f(x) = x^2 + 6x - x^3$

a) Bestem integralet $\int_{-2}^{3} f(x)dx$

b) Grafen til f og x-aksen avgrenser et areal. Finn dette ved regning.

c) Bestem ved regning a slik at $\int_{1}^{a} \ln x \, dx = 1$ $(a > 0)$

Fasit til MET2210 gitt 10.06.04

1 a) $a=1$ eller $a=2$ b) $a=0$ eller $a=3$

c) $X=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $Y=\begin{pmatrix}1 & -0.5 & -1\\ 0 & 0.5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ d) $XY=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

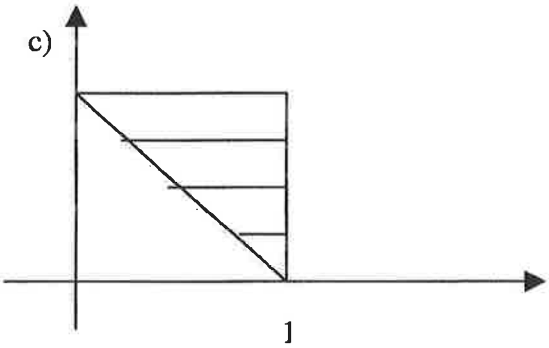
2 $f(0,1)=1$ globalt maksimum $f(0,-1)=-1$ globalt minimum.

3) a) Likningen til tangenten er $y=-\frac{4}{3}x+\frac{10}{3}$

b)

	A	B	C	$AC-B^2$	
(0,0)	0	-2	0	-4	Sadel
(0,2)	4	2	0	-4	Sadel
(2,0)	0	2	4	-4	Sadel
$\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	lok. min

c)



d) Stasjonært punkt $f(\frac{2}{3},\frac{2}{3})=-0.2963$ Globalt minimum

Punktene (1,0) (0,1) og (1,1) er globale maksimumspunkter.

4 a) Samlet utslipp er 6650.74

b) 5990.47

5 a) $\frac{125}{12}\approx 10.41$ b) 21.08 c) $a=e$

Handelshøyskolen BI
Institutt for samfunnsøkonomi

Skriftlig eksamen i: MET 2210 Matematikk F

Studium: Siviløkonomstudiet.

Eksamensdato: 09.12.04, kl. 09-14

Tillatte hjelpemidler: Alle
Antall sider: 3
Innføringsark: Ruteark

NB! Besvarelsen skal tydelig vise fremgangsmåten du har benyttet

Oppgave 1

a) Gitt ligningssettet

$$\begin{aligned} ax_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 3x_1 + (a+1)x_2 + ax_3 &= -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Hvilke verdier kan a ikke ha dersom ligningssettet skal ha éntydige løsninger?
Hvilken verdi av a gir $x_1 = -2$?

b) Gitt matrisene

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 2x^2 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestem x slik at $AB = BA$

Oppgave 2

a) En person satte 10 000 kr i banken 1. januar 1991. Siden satte han inn 10 000 kr hver 1. januar til og med 1996. Hvor mye hadde han på kontoen 31.desember 1996 ? Renten er 5% per år.

b) Person A satte 10 000 kr i banken 1. januar 1991. Siden satte han inn 10 000 kr hver 1. januar til og med 1996. 1. januar 1997 satte han inn beløpet 12 000 kr og fortsatte med det hver 1. januar til og med 2003. Hvor mye hadde han på kontoen 31. desember 2003 ?

Fra og med 1. januar 1991 til og med 31. desember 1996 er renten er 5% per år.

Fra og med 1. januar 1997 til og med 31. desember 2003 er renten er 3% per år.

c) Personen B satte inn beløpet K_0 1.januar 1991. Dette fortsatte hun med hvert år til og med 1. januar 2003. Hun hadde en fast renteavtale på 4% per år. 31. desember 2003 hadde hun like mye på kontoen som A. Hvor stort var K_0?

Oppgave 3

Du skal ved å bruke Lagrangemultiplikatorer finne de globale maksimum og minimumspunktene for funksjonen

$$f(x,y) = x^2 y \quad \text{under bibetingelsen} \quad g(x,y) = x^2 + y^2 = 3$$

Oppgave 4

En bedrift har en kostnadsfunksjon $K(x) = \frac{1}{3}x^3 - 10x^2 + 200x + 300$ Her er x antall produserte enheter. $x \geq 0$

a) Beregn grensekostnaden.

b) For hvilke verdier av x er grensekostnaden lik 104

c) Bedriften får en pris $p = 164$ pr enhet. Hvor mye må bedriften produsere for å maksimere sin fortjeneste, og hvor stor blir fortjenesten?

d) Anta at kostnadsfunksjonen er $C(x) = ax^3 - 10x^2 + 200x + 300$. Her er $a > 0$ en konstant. Beregn grensekostnaden. Hvor stor er den minste verdien av a som gjør at $C(x)$ er en voksende funksjon.

Oppgave 5

a) Gitt funksjonen $z = f(x, y) = \frac{1}{4}x^4 - 9xy + \frac{9}{2}y^2 + 18x - 18y$

Finn de partiellderiverte til $f(x, y)$ av første og annen orden.

b) Finn de stasjonære punktene til $f(x, y)$. Klassifiser punktene.

Oppgave 6

I en undersøkelse som omfattet 450 000 nordmenn, fant man ut at en inntektsfordeling hos de som tjente mellom 200 000 kr og 500 000 kr kunne uttrykkes ved formelen

$$f(r) = \frac{5 \cdot 10^7}{r^2}$$

Her betyr r inntekten målt i tusen kroner. Det vil si $r \in [200, 500]$.

a) Hvor mange % av alle som var med i undersøkelsen hadde inntekt i det aktuelle området?

b) Hvor stor var gjennomsnittsinntekten for disse personene?

c) For å være blant de 10 000 personene som tjener mest i den aktuelle gruppen må du tjene minst hvor mye ?

Fasit til met2210 gitt 09.12.04

1 a) a kan ikke ha verdiene -3 eller 3 b) $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} = \pm 0.7071$

2 a) 71420.08 b) 182545.72 c) $K_0 = 10556.72$

3 $f(-\sqrt{2},-1) = -2$ $f(\sqrt{2},-1) = -2$ Globale minimumspunkter

$f(-\sqrt{2},1) = 2$ $f(\sqrt{2},1) = 2$ Globale maksimumspunkter

4 a) $K'(x) = x^2 - 20x + 200$ b) $x = 8$ eller $x = 12$

c) Maksimal fortjeneste når $x = 18$. Den maksimale fortjenesten blir 348

d) $C'(x) = 3ax^2 - 20x + 200$ $a = \frac{1}{6}$

5 a) $f'_x = x^3 - 9y + 18$ $f'_y = -9x + 9y - 18$

$f''_{xx} = 3x^2$ $f''_{xy} = -9$ $f''_{yx} = -9$ $f''_{yy} = 9$

b)

	A	B	C	$AC - B^2$	
$(0,2)$	0	-9	9	-81	Sadel
$(-3,-1)$	27	-9	9	162	lok. min
$(3,5)$	27	-9	9	162	lok. min

6 a) 33.33%. b) 305.43 (tusen) c) $a = \frac{5000}{11} = 454.5455$ (tusen)

Handelshøyskolen BI
Institutt for samfunnsøkonomi

Flervalgseksamen i:	**MET 24101 Matematikk**	F
Eksamensdato:	**09.12.04, kl. 09.00 - 12.00**	
Tillatte hjelpemidler:	**Alle**	
Innføringsark:	**Svarark**	
Antall sider/oppgaver:	**Forside + 4 sider med 15 oppgaver**	
Antall vedlegg:	1 (eksempel på utfylt svarark)	

Les denne siden før du begynner!

- Studenten må selv påse at oppgavesettet er komplett.

- Svararket skal påføres følgende informasjon:
  - Eksamenskode
  - Initialer
  - Eksamenssted
  - Studentnummer

  Studentnummeret må både fylles ut med tall og krysses av i kolonnene under.

- Blyant eller penn/tusj med grønn farge kan ikke benyttes ved utfylling av svararket. Svararket må heller ikke brukes som kladdeark

- **Alle svar skal påføres svararket med et kryss under bokstaven du mener angir rett svar.**
  Annuller kryss med å fylle ruten helt (helt fylt rute blir ikke registrert).
  To kryss på et spørsmål vil bli registrert som feil svar.

  I vedlagte eksempel er det vist hvordan du fyller ut hvis A er korrekt for spørsmål 1, B er korrekt for spørsmål 2, C er korrekt for spørsmål 3, D er korrekt for spørsmål 4 og E hvis du ikke ønsker å besvare spørsmål 5.

  Svarene skal påføres svararket. Svar påført selve oppgavesettet vil ikke bli sensurert.

- Det er kun <u>ett</u> riktig svar på hvert spørsmål. Siden alle spørsmål har lik vekt, kan det være en fordel å besvare de enkleste spørsmålene først.

- Galt svar gir -1 poeng, ubesvart 0 poeng (avmerket med svaralternativ (E)) og riktig svar 3 poeng.

- Oppgavesettet kan beholdes.

Oppgave 1

På nivålinjen $f(x,y)=x^3+x^2y-2y^2-10y=0$ ligger punktet $P(2,1)$.
Tangenten i dette punktet har stigningstallet:

A) $\frac{8}{5}$ B) $\frac{5}{8}$ C) $-\frac{8}{5}$ D) $-\frac{5}{8}$

E) Jeg velger å ikke besvare oppgaven.

Oppgave 2

En bedrift har en kostnadsfunksjon $K(x)=\frac{1}{3}x^3-10x^2+150x+420$ Her er x antall produserte enheter. $x\geq 0$

Grensekostnaden er større enn 75 når

A) $0\leq x<10$ B) $5<x<15$

C) $7<x<15$ D) $0\leq x<5$ eller $x>15$

E) Jeg velger å ikke besvare oppgaven.

Oppgave 3

En bedrift har en kostnadsfunksjon $K(x)=\frac{1}{3}x^3-10x^2+150x+420$ Her er x antall produserte enheter. $x\geq 0$
Prisen $p=150$ per enhet.
For å oppnå maksimal fortjeneste bør produksjonen være:

A) 18 B) 19 C) 20 D) 21

E) Jeg velger å ikke besvare oppgaven.

Oppgave 4

Etterspørselen etter en vare er $x=D(p)=2100-7p^2$

Elastisiteten $E_p=-1$ når .

A) $p=7$ B) $p=8$ C) $p=10$ D) $p=14$

E) Jeg velger å ikke besvare oppgaven.

Oppgave 5

La x være et positivt tall. Hvilket av utsagnene er **ikke** sant?

A) $\ln x - \ln(2x) = -\ln 2$ B) $(\ln x)^4 = 4 \cdot \ln x$

C) $\ln x = 2\ln(\sqrt{x})$ D) $\ln(x^{10}) - \ln(x^4) = 3\ln(x^2)$

E) Jeg velger å ikke besvare oppgaven.

Oppgave 6

Dersom $f(x) = 4^x$, så er $f(x+1) - f(x)$ lik

A) $f(x)$ B) $4 \cdot f(x)$ C) $3 \cdot f(x)$ D) $2 \cdot f(x)$

E) Jeg velger å ikke besvare oppgaven.

Oppgave 7

Funksjonen $f(x,y) = x\ln x + x\ln y - x - 2y$ har ett stasjonært punkt (x_0, y_0)

A) $x_0 \cdot y_0 = 2$ B) $x_0 \cdot y_0 = \frac{1}{2}$ C) $x_0 \cdot y_0 = e$ D) $x_0 \cdot y_0 = 1$

E) Jeg velger å ikke besvare oppgaven.

Oppgave 8

Gitt funksjonen $f(x,y) = x^4 - xy - x^2y^2$
Ett av de stasjonære punktene er $(0,0)$. Dette punktet er

A) Lokalt minimumspunkt B) Lokalt maksimumspunkt

C) Sadelpunkt D) Annenderivert-testen virker ikke i dette tilfelle.

E) Jeg velger å ikke besvare oppgaven.

Oppgave 9

Funksjonen $f(x) = x^2 \cdot e^x$ har to vendepunkter. Kaller vi disse for x_1 og x_2 har vi

A) $x_1 + x_2 = 0$ B) $x_1 + x_2 = 4$

C) $x_1 + x_2 = -4$ D) $x_1 + x_2 = e$

E) Jeg velger å ikke besvare oppgaven.

Oppgave 10

$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$. Hele løsningsmengden til $f(x) < 0$ er:

A) $<0, \infty>$ B) $<-1,0> \cup <0,1>$

C) $<-\infty,0> \cup <0,1>$ D) $<-\infty,0>$

E) Jeg velger å ikke besvare oppgaven.

Oppgave 11

Dersom $\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{m}\right)=1$, så er m lik

A) $n+1$ B) $n-1$ C) n D) $2n$

E) Jeg velger å ikke besvare oppgaven.

Oppgave 12

Funksjonen $f(x, y) = x^2y^2 - 2x^2 - 4y^2$ har et antall sadelpunkter som er

A) 0 B) 2 C) 4 D) 1

E) Jeg velger å ikke besvare oppgaven.

Oppgave 13

Gitt funksjonen $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+2}$

Den deriverte til denne funksjonen er null når.

A) $x = 3$ B) $x = 2$ C) $x = 1$ D) $\sqrt{2}$

e) Jeg velger å ikke svare på oppgaven.

Oppgave 14

$\frac{1}{x} + \frac{1}{a} = \frac{1}{b}$. Her må x være

A) $b - a$ B) $\frac{ab}{a-b}$ C) $\frac{b-a}{ab}$ D) $\frac{1}{b} - \frac{1}{a}$

E) Jeg velger å ikke besvare oppgaven.

Oppgave 15

Gitt funksjonen $f(x, y) = x^2 - 2y^2 - x$.
Definisjonsområdet til funksjonen er gitt ved:

$0 \leq x \leq 2 \quad 0 \leq y \leq x$

Det kan vises at denne funksjonen ikke har noen stasjonære punkter i det indre av definisjonsområdet . Globalt maksimum og minimum må derfor ligge på randen av definisjonsområdet. Den globale maksimumsverdien er:

A) 0 B) 2 C) 3 D) 4

E) Jeg velger å ikke besvare oppgaven.

Fasit til eksamen i met 2410 gitt 09.12.04

Oppgave 1	A
Oppgave 2	D
Oppgave 3	C
Oppgave 4	C
Oppgave 5	B
Oppgave 6	C
Oppgave 7	D
Oppgave 8	C
Oppgave 9	C
Oppgave 10	C
Oppgave 11	A
Oppgave 12	C
Oppgave 13	B
Oppgave 14	B
Oppgave 15	B

Handelshøyskolen BI
Institutt for samfunnsøkonomi

Skriftlig eksamen i:	MET 24102 Matematikk F
Studium:	Siviløkonomstudiet.
Eksamensdato:	03.06.05, kl. 09-14
Tillatte hjelpemidler:	Alle
Antall sider:	2
Innføringsark:	Ruteark

NB! Besvarelsen skal tydelig vise fremgangsmåten du har benyttet

Oppgave 1

a) Gitt ligningssettet

$$\begin{aligned} ax_1 + a^2x_2 + a^3x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Det finnes tre verdier av a som gjør at ligningssettet ikke har entydige løsninger. Hvilke?

b) Vis at dersom ligninssettet har entydige løsninger, vil x_2 alltid få samme verdi uansett hvilken verdi a har.

c) Gitt matrisen $M = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & x+1 & 0 \end{pmatrix}$

For hvilke verdier av x er $M^{-1} = \frac{1}{2}M$?

Oppgave 2

Gitt funksjonen $f(x,y) = x^3 + 3y^3 - 3xy^2 - 15y$

a) Finn og klassifiser de stasjonære punktene.

b) På nivålinjen $f(x,y) = 8$ ligger punktet $(2,0)$
Finn ligningen for tangenten i dette punktet.

c) Funksjonen er nå definert i området gitt ved $0 \le x \le 1$ *og* $0 \le y \le 1$
Bestem funksjonens maksimum og minimum nå.

Oppgave 3

Gitt funksjonene $f(x,y) = x + 3y$ og $g(x,y) = x^2 + y^2$

Forklar at $f(x,y)$ har både maksimum og minimum under bibetingelsen $g(x,y) = 40$.
Finn maksimum og minimum . (Tips.: Bruk Lagrange)

Oppgave 4

En mann tok opp et lån på 500 000 kr 1. januar 2000. Lånet var av annuitetstypen og første beløp skulle betales 31.des. 2000 og deretter ble beløpene betalt med ett års mellomrom. Renten var hele tiden 6% p.a.

a) Hvor stort var det årlige beløpet K når lånet skulle betales tilbake på 25 år.

b) Hvor stor er restgjelden 1. januar 2010?

c) Etter betalingen 31. desember 2009 ble han enig med banken om å betale $2K$ kr per år, første betaling 31. desember 2010. Hvor mange betalinger gjenstår før lånet er nedbetalt?

Oppgave 5

Dersom en funksjon $f(x)$ er kontinuerlig i det lukkede intervallet $[a,b]$ defineres *middelverdien* **M** av f i $[a,b]$ slik.

$$M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx .$$

a) Finn middelverdien av $f(x) = \sqrt{x}$ i $[0,4]$

Fortjenesten i en bedrift som funksjon av antall produserte enheter , x, er gitt ved

$$P(x) = 4000 - x - \frac{3000000}{x}$$

b) For hvilke verdier av x er fortjenesten positiv?

c) Hvor stor er fortjenesten når den er størst?

d) Dersom den aktuelle produksjonen varierer mellom 1000 og 3000 enheter vil den gjennomsnittlige fortjenesten være gitt ved integralet

$$I = \frac{1}{2000}\int_{1000}^{3000} P(x)\,dx \qquad \text{Bestem } I.$$

Fasit til MET 24102 Matematikk gitt : 03.06.05, kl. 09.00-14.00

1 a) $a=0$ eller $a=-1$ og $a=1$ c) $x=1$ eller $x=-2$

2 a)

	A	B	C	$AC-B^2$	
$(-1,1)$	-6	-6	24	-180	Sadel
$(1,-1)$	6	6	-24	-180	Sadel
$(-\sqrt{5},-\sqrt{5})$	$-6\sqrt{5}$	$6\sqrt{5}$	$-12\sqrt{5}$	180	lok maks
$(\sqrt{5},\sqrt{5})$	$6\sqrt{5}$	$-6\sqrt{5}$	$12\sqrt{5}$	180	lok min

b) $y=\frac{4}{5}x-\frac{8}{5}$

c) $f(1,0)=1$ globalt maksimum, $f(1,1)=-14$ globalt minimum

3 $f(-2,-6)=-20$ er et globalt minimumspunkt.
$f(2,6)=20$ er et globalt maksimumspunkt.

4 a) Det årlige beløpet er $K=39113.36$ b 379878.69

c) Han må betale inn 6 beløp.

5 a) $\frac{4}{3}$ b) Fortjenesten er positiv når $1000<x<3000$

c) $x=1732$ gir maksimal fortjeneste $f(1732)=535.90$

d) $\frac{1}{2000}(4000000-3000000\ln 3)=352.082$