| | |
|---|---|
| Prøve-eksamen | MET 11803 Matematikk |
| Dato | Mai 2016 kl 0900 - 1400 |

Eksamensoppgaven består av 16 delspørsmål med samme vekt, som har maksimal score 6p hver og totalt har maksimal score 96p (100%). I tillegg inneholder eksamensoppgaven et bonus-spørsmål som man ikke trenger besvare, men som kan gi opptil 6p ekstra. **Alle svar skal begrunnes.**

## Oppgave 1.

Vi betrakter det lineære likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ når matrisen $A$ og vektorene $\mathbf{x}$ og $\mathbf{b}$ er gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 2-r & 2 & -1 \\ 1 & 3-r & -1 \\ -1 & -2 & 2-r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ r-1 \end{pmatrix}$$

Vi betrakter $r$ som en parameter og $x$,$y$,$z$ som variable.

(a) **(6p)** Løs det lineære systemet når $r = 5$. Hvor mange frihetsgrader har systemet?
(b) **(6p)** Regn ut $|A|$ for en vilkårlig verdi av $s$.
(c) **(6p)** Finn $A^{-1}$ når $r = 0$, og bruk $A^{-1}$ til å løse det lineære systemet i dette tilfellet.
(d) **(6p)** For hvilke verdier av $r$ har det lineære systemet eksakt én løsning? Finn $y$ i disse tilfellene.

## Oppgave 2.

Vi betrakter funksjonen $f(x) = x \ln x$ definert for $x > 0$.

**(6p)** Finn grenseverdiene $\lim_{x\to\infty} f(x)$ og $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

## Oppgave 3.

Regn ut de ubestemte integralene:

(a) **(6p)** $\displaystyle\int \frac{\ln x + 1}{x^2}\,\mathrm{d}x$
(b) **(6p)** $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2+4}\,\mathrm{d}x$
(c) **(6p)** $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2 - 5x + 4}\,\mathrm{d}x$

Vi betrakter området $R$ begrenset av $x$-aksen, grafen til $f(x) = x \ln x$ og den vertikale linjen $x = 2$.

(d) **(6p)** Tegn en skisse som viser området $R$, og regn ut arealet til $R$.

## Oppgave 4.

Vi betrakter funksjonen

$$f(x,y) = (xy + 2x)e^{x+y}$$

(a) **(6p)** Regn ut $f'_x$ og $f'_y$, og finn eventuelle stasjonære punkter for $f$.
(b) **(6p)** Klassifisér de stasjonære punktene som lokale maksima, lokale minima eller sadelpunkt.
(c) **(6p)** Finn den lineære approksimasjonen til $f$ i punktet $(x,y) = (2,-2)$.
(d) **(6p)** Finn eventuelle maksimums- og minimumsverdier for $f$.

## Oppgave 5.

Vi betrakter Lagrange-problemet

$$\max / \min f(x,y) = \ln(16 - x^2 - y^2) \quad \text{når} \quad 2x + 3y = 12$$

(a) **(6p)** Forklar hvorfor de tillatte punktene i Lagrange-problemet må oppfylle $x^2 + y^2 < 16$ i tillegg til bibetingelsen, og tegn en skisse av av de tillatte punktene.
(b) **(6p)** Bruk Lagranges metode til å finne kandidater for maksimum og minimum.
(c) **(6p)** Løs Lagrange-problemet ved å gjøre det om til et optimeringsproblem i én variabel.

Vi endrer bibetingelsen i optimeringsproblemet til $2x + 3y \leq 12$.

(d) **Bonus (6p)** Løs det nye optimeringsproblemet.

# Formelsamling

## 1 Finansmatematikk

**Geometriske rekker.** En endelig geometrisk rekke har sum

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-k^n}{1-k}$$

og en uendelige geometrisk rekke har sum

$$S = a_1 \cdot \frac{1}{1-k} \quad \text{når } |k| < 1$$

**Nåverdier.** Nåverdien $K_0$ til en innbetaling $K_n$ er henholdsvis

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n} \quad \text{og} \quad K_0 = \frac{K_n}{e^{rn}}$$

ved diskret og kontinuerlig diskonteringsrente.

## 2 Integrasjon

**Integrasjonsmetoder.**

a) Delvis integrasjon:

$$\int u'v \,\mathrm{d}x = uv - \int uv' \,\mathrm{d}x$$

b) Substitusjon:

$$\int f(u)u' \,\mathrm{d}x = \int f(u) \,\mathrm{d}u$$

c) Delbrøksoppspaltning:

$$\int \frac{px+q}{(x-a)(x-b)} = \int \left( \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \right) \mathrm{d}x$$

**Areal.** Regionen gitt ved $f(x) \leq y \leq g(x)$ for $a \leq x \leq b$ har areal

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x)) \,\mathrm{d}x$$

## 3 Lineær algebra

**Cramers regel.** Et lineært system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ der $|A| \neq 0$ har en entydig løsning gitt ved

$$x_1 = \frac{|A_1(\mathbf{b})|}{|A|} \quad x_2 = \frac{|A_2(\mathbf{b})|}{|A|} \quad \ldots \quad x_n = \frac{|A_n(\mathbf{b})|}{|A|}$$

der $A_i(\mathbf{b})$ er matrisen som framkommer ved å bytte ut kolonne $i$ fra matrisen $A$ med $\mathbf{b}$.

## 4 Funksjoner i flere variable

**Annenderivert-testen.** Et stasjonært punkt $(x^*, y^*)$ for funksjonen $f(x,y)$ er et

a) lokalt minimum om $A > 0$ og $AC - B^2 > 0$
b) lokalt maksimum om $A < 0$ og $AC - B^2 > 0$
c) sadelpunkt om $AC - B^2 < 0$

når vi setter $A = f''_{xx}(x^*, y^*)$, $B = f''_{xy}(x^*, y^*)$ og $C = f''_{yy}(x^*, y^*)$.

**Nivåkurver.** På nivåkurven $f(x,y) = c$ er den deriverte $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ gitt ved

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

**Totalderivasjon.** Når $z = f(x,y)$, og vi har $x = x(t)$ og $y = y(t)$, så er den totalderiverte

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$