Løsning	Prøve-eksamen for MET 11802 Matematikk
Dato	November 2015

Riktige svar: B-D-C-B-B D-C-D-B-B C-B-A-D-D

Oppgave 1.

Siden terminlengden er en måned, er vekstfaktoren per måned $1 + 0{,}03/12 = 1{,}0025$, og balansen x måneder etter 01/04/2005 er 250.000 dersom

$$100.000 \cdot 1{,}0025^x = 250.000$$

Løser vi denne likningen, får vi $x = \ln(2{,}5)/\ln(1{,}0025) \approx 366{,}97$. Det tar dermed $x = 367$ måneder før balansen overstiger 250.000 ved månedsslutt, og det skjer dermed etter 30 år og 7 mnd. Riktig svar er alternativ **B**.

Oppgave 2.

Terminbeløpet A er gitt ved

$$A(1+r)^{-1} + A(1+r)^{-2} + \cdots + A(1+r)^{-n} = L \quad \Rightarrow \quad A = L \cdot \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

med $L = 3.400.000$, $n = 240$, $r = 0{,}024/12 = 0{,}002$. Dette gir $A \approx 17.851{,}52$. De samlede rentekostnadene blir da

$$240A - 3.400.000 = 884.365{,}11$$

Riktig svar er alternativ **D**.

Oppgave 3.

Den geometriske rekken $S(x) = x - x^3/2 + x^5/4 - \dots$ har $k = -x^2/2$, og er derfor konvergent når $|k| = |x|^2/2 < 1$, eller når $|x| < \sqrt{2}$. Dermed er $a = \sqrt{2}$. Spesielt er rekken konvergent for $x = 1/2$, med sum

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + 1/8} = \frac{4}{9}$$

Riktig svar er alternativ **C**.

Oppgave 4.

Nåverdien av kontantutbytter, med diskonteringsrente $r = 0{,}08$, er gitt ved

$$\frac{250.000}{(1+r)^3} + \frac{250.000 \cdot 1{,}03}{(1+r)^4} + \cdots = \frac{250.000}{(1{,}08)^3} \cdot \frac{1}{(1 - 1{,}03/1{,}08)} = \frac{250.000}{0{,}05 \cdot (1{,}08)^2} \approx 4.286.694{,}10$$

Riktig svar er alternativ **B**.

Oppgave 5.

Vi skriver ulikheten på formen

$$\frac{x - (x^2 - 7x + 12)}{x^2 - 7x + 12} = \frac{-x^2 + 8x - 12}{x^2 - 7x + 12} = -\frac{(x-2)(x-6)}{(x-3)(x-4)} > 0$$

og setter opp fortegnsskjema for VS. Vi ser at løsningsmengden består av intervallene (2,3) og (4,6). Riktig svar er alternativ **B**.

Oppgave 6.

Likningen kan skrives $x^5 - 2x^3 - x = x(x^4 - 2x^2 - 1) = 0$, og har løsninger $x = 0$ eller $x^2 = 1 \pm \sqrt{2}$. Siden $x^2 \geq 0$, følger det at $x = 0$ eller $x^2 = 1 + \sqrt{2}$. Dette gir $x = 0$ og $x = \pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$. Riktig svar er alternativ **D**.

Oppgave 7.

Vi kvadrerer begge sider i likningen og får

$$16 - 8\sqrt{x} + x = x - 2 \quad \text{eller} \quad 8\sqrt{x} = 18$$

Det betyr at $\sqrt{x} = 18/8 = 9/4$, eller $x = 81/16$. Vi setter prøve, og ser at $x = 81/16$ gir at VS er $4 - 9/4 = 7/4$ og HS er $\sqrt{49/16} = 7/4$, så $x = 81/16 > 4$ en løsning. Riktig svar er alternativ **C**.

Oppgave 8.

Siden $f(a) = 3 - a = 0$, må $a = 3$. De andre nullpunktene finner vi ved polynomdivisjon, som gir

$$(x^3 - ax^2 - x + 3) : (x - a) = x^2 - 1$$

Det er derfor to andre nullpunkt, gitt ved $x^2 = 1$, som gir $x = \pm 1$. Riktig svar er alternativ **D**.

Oppgave 9.

Vi finner eventuelle horisontale og skrå asymptoter ved polynomdivisjon:

$$\frac{x^3 + 4x - 2}{2x^2 + x - 1} + 1 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{1/4(19x - 9)}{2x^2 + x - 1} + 1 = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} + \frac{1/4(19x - 9)}{2x^2 + x - 1}$$

og dermed er $y = x/2 + 3/4$ en skrå asymptote. Riktig svar er alternativ **B**.

Oppgave 10.

Stigningstallet til tangenten i $x = 0$ er lik $f'(0)$, og vi har at

$$f'(x) = \frac{(1 \cdot \ln(x^2+1) + x \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x)(x+1)^2 - x\ln(x^2+1) \cdot 2(x+1) \cdot 1}{(x+1)^4} \qquad \Rightarrow \qquad f'(0) = 0$$

Riktig svar er alternativ **B**.

Oppgave 11.

Funksjonen $f(x) = (x^2 + x - 5)e^{-x}$ har derivert

$$f'(x) = (2x+1)e^{-x} + (x^2 + x - 5)e^{-x}(-1) = (-x^2 + x + 6)e^{-x} = -(x-3)(x+2)e^{-x}$$

Mulige maksimum og minimum er de stasjonære punktene $x = 3$ og $x = -2$. Vi ser fra fortegnsskjema for f' at f er strengt avtagende i $(-\infty, -2]$ og i $[3,\infty)$ og strengt voksende i $[-2,3]$. Når $x \to \pm\infty$ har vi

$$\lim_{x\to\infty} (x^2 + x - 5)e^{-x} = 0 \quad \text{og} \quad \lim_{x\to-\infty} (x^2 + x - 5)e^{-x} = \infty$$

Den første grenseverdien har vi regnet ut ved å bruke L'Hospitals regel. Det følger at det lokale bunnpunktet $x = -2$ er minimum (det vil si globalt minimum), men det lokale topp-punktet $x = 3$ ikke er maksimum (det vil si globalt maksimum) siden $f(x) \to \infty$ når $x \to -\infty$. Riktig svar er alternativ **C**.

Oppgave 12.

Funksjonen $f(x) = xe^{-x}$ har derivert

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + xe^{-x}(-1) = (1-x)e^{-x}$$

og er voksende for $x \leq 1$ og avtagende for $x \geq 1$. Funksjonen f har derfor en omvendt funksjon om $[a,b]$ er inkluedert i $(-\infty,1]$ eller i $[1,\infty)$. Riktig svar er alternativ **B**.

Oppgave 13.

Grenseverdien kan skrives som en sum

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x \ln x}{x^2} + \lim_{x\to\infty} \frac{-\sqrt{x}+1}{x^2}$$

der begge grenseverdiene er ubestemte ∞/∞-uttrykk. Den første grenseverdien finner vi ved L'Hospitals regel:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

Den andre kan vi se må være lik 0 siden x^2 vokser raskere enn $\sqrt{x} = x^{1/2}$, men vi kan også finne den ved L'Hospitals regel:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-\sqrt{x}+1}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x} = 0$$

Grenseverdier er altså $0 + 0 = 0$. Riktig svar er alternativ **A**.

Oppgave 14.

Den deriverte funksjonen til $f(x) = x^2e^x - x + 1$ er

$$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x - 1 = (x^2 + 2x)e^x - 1$$

og den dobbeltderiverte er

$$f''(x) = (2x+2)e^x + (x^2+2x)e^x = (x^2+4x+2)e^x = (x-x_1)(x-x_2)e^x$$

der $x_1 = -2 + \sqrt{2}$ og $x_2 = -2 - \sqrt{2}$. Ved å sette opp et fortegnsdiagram for $f''(x)$ ser vi at disse to punktene er vendepunktene for f. Riktig svar er alternativ **D**.

Oppgave 15.

Funksjoenen $f(x) = \sqrt{x^3 - x}$ er definert når $x^3 - x \geq 0$. Vi setter opp fortegnsskjema for uttrykket $x^3 - x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$, og ser at $x^3 - x \geq 0$ når x er med i intervallet $[-1,0]$ og når $x \geq 1$. Dermed er $D_f = [-1,0] \cup [1,\infty)$ og $x = -1, 0, 1$ er randpunkter. Den deriverte er gitt ved

$$y^2 = x^3 - x \quad \Rightarrow \quad 2yy' = 3x^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{3x^2-1}{2y} = \frac{3x^2-1}{2\sqrt{x^3-x}}$$

Vi kan også finne den deriverte uten implisitt derivasjon, ved å bruke kjerneregelen. Vi ser at $f'(x) = 0$ når $3x^2 - 1 = 0$, eller $x = \pm\sqrt{1/3}$, og $x = -\sqrt{1/3}$ er det eneste av disse punktene som er med i D_f. Til slutt er f ikke deriverbar der $y = 0$, det vil si i randpunktene $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$. Kandidater for lokale maks/min er derfor puntene $x = -1, 0, 1$ og $x = -\sqrt{1/3}$. Fra fortegnsskjema for $f'(x)$ ser vi at de tre første punktene (randpunktene) er lokale min, mens $x = -\sqrt{1/3}$ er lokalt maks. Riktig svar er alternativ **D**.