Veiledningsoppgaver

Oppgave 1.
Vi ser på matrisene

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Regn ut følgende uttrykk, dersom det er mulig:

a) $A + B$ b) $2A - 3B$ c) $A - C$ d) AB e) BC f) ABC

g) AC h) A^2 i) BA j) CB k) C^2 l) $C^T A$

Oppgave 2.
Finn A^{-1}, dersom det er mulig:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ f) $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Oppgave 3.
Bestem de verdiene av a som er slik at den inverse matrisen til A eksisterer, og regn ut A^{-1} i disse tilfellene:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 3 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Oppgave 4.
Vi ser på det lineære systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med

$$A = \begin{pmatrix} t & 0 & 1 \\ 0 & t & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

a) Løs systemet når $t = 2$.

b) Avgjør hvor mange løsninger systemet har for ulike verdier av t.

c) Finn den inverse matrisen A^{-1} når den eksisterer, og bruk dette til å løse systemet i disse tilfellene.

Oppgave 5.
Skriv uttrykkene enklest mulig:

a) $(A+B)^2$ b) $(A^TA)^T$ c) $A(3B-C)+(A-2B)C+2B(C+2A)$

d) $A^{-1}(BA)$ e) $(BAB^{-1})^2 \cdot B^2$ f) $(A-B)(C-A)+(C-B)(A-C)+(C-A)^2$

Oppgave 6.
Anta at A og B er 3×3-matriser med $|A|=2$ og $|B|=-5$. Regn ut:

a) $\det(AB)$ b) $\det(3A)$ c) $\det(-2B^T)$ d) $\det(2A^{-1}B)$

Oppgave 7.
Løs matriselikningen for X når $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$:

a) $AX = I$ b) $X^2 = A$ c) $AX = XA$

Oppgave 8.
Vi betrakter det lineære systemet $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ med parameter a, gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 4 \\ 2a & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 16 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ 40 \\ 51 \end{pmatrix}$$

a. Bruk Gauss-eliminasjon til å løse det lineære systemet når $a = 2$. Marker pivot-posisjonene.

b. Regn ut $\det(A)$, og bestem alle verdier av a slik at $\det(A) = 0$.

c. Finn A^{-1} når $a = 3$.

d. Vis at $A^7 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ har eksakt én løsning for $a = -1$, og uttrykk løsningen $\mathbf{x}$ ved A og $\mathbf{b}$.

Oppgave 9.
La A være en $n \times n$ matrise. En elementær radoperasjon $A \to B$ kan realiseres som en multiplikasjon med en $n \times n$-matrise E fra venstre, slik at $B = E \cdot A$. Da kalles E den elementære matrisen til radoperasjonen $A \to B$. Finn de elementære matrisene som til følgende elementære radoperasjoner på 3×3-matriser:

a) Bytte om de to siste radene b) Multiplisere den andre raden med -1

c) Legge til 2 ganger rad en til rad to d) Legge til -2 ganger rad tre til rad en

Forklar hvorfor alle elementære matriser er invertible, og hvorfor en kvadratisk matrise er invertibel hvis og bare hvis den er et produkt av elementære matriser.

Oppgave 10.
Oppgaver fra læreboken: 6.5.1, 6.5.4 - 6.5.6, 6.6.1 - 6.6.6
Oppgaver fra oppgaveboken: 9.23, 9.25

Svar på veiledningsoppgaver

Oppgave 1.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 11 \\ -5 & -4 & -10 \end{pmatrix}$ c) ikke definert d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 10 & 19 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 15 & 0 \\ -4 & 3 \\ 33 & 4 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 44 & 7 \\ 158 & 19 \\ 14 & 7 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 35 & 10 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 13 \end{pmatrix}$ j) ikke definert k) ikke definert l) $\begin{pmatrix} -2 & 11 & 14 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

Oppgave 2.

a) $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ b) $A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$ c) A^{-1} ikke definert

d) $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e) $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ f) A^{-1} ikke definert

Oppgave 3.

a) $A^{-1} = \frac{1}{1-a^2}\begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$ for $a \neq -1,\ 1$ b) $A^{-1} = \frac{1}{6a}\begin{pmatrix} 2a & -2 & 1-a^2 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 3a \end{pmatrix}$ for $a \neq 0$

c) $A^{-1} = \frac{1}{(1-a)(1+3a)}\begin{pmatrix} 2 & a-1 & 1-3a \\ a-1 & 1-a^2 & a-1 \\ 1-3a & a-1 & 2 \end{pmatrix}$ for $a \neq -1/3, 1$

Oppgave 4.

a) $(x,y,z) = (2/3,0,2/3)$

b) Uendelig mange løsninger for $t = 0$ og $t = 1$, ingen løsninger for $t = -1$, og én løsning for $t \neq -1,0,1$

c) $A^{-1} = \frac{1}{t(t^2-1)}\begin{pmatrix} t^2 & 0 & -t \\ 0 & t^2-1 & 0 \\ -t & 0 & t^2 \end{pmatrix}$ for $t \neq -1,0,1$, løsningene er $(x,y,z) = \left(\frac{t}{t+1}, 0, \frac{t}{t+1}\right)$ for $t \neq -1,0,1$

Oppgave 5.

a) $A^2 + AB + BA + B^2$ b) A^TA c) $3AB{+}4BA$ d) $A^{-1}BA$ e) BA^2B f) 0

Oppgave 6.

a) -10 b) 54 c) 40 d) -20

Oppgave 7.

a) $X = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) ingen løsning

c) $X = s\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Oppgave 8.

a) $(7-2y, y, 1)$ der y er fri

b) $-32a^2 + 140a - 152$, $a = 2$ eller $a = 19/8$

c) $\frac{1}{20}\begin{pmatrix} -8 & 8 & -4 \\ 36 & 4 & -12 \\ -20 & -5 & 10 \end{pmatrix}$

d) $(A^{-1})^7 \cdot \mathbf{b}$

Oppgave 9.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$