Veiledningsoppgaver

Oppgave 1.
Bruk elementære radoperasjoner til å finne den inverse matrisen til A, hvis den finnes. Sjekk svaret ved å sammenligne med determinanten og den adjungerte matrisen til A.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Oppgave 2.
La A være en 2×3-matrise.

a) Er A symmetrisk?

b) Er $A^T A$ symmetrisk?

c) Regn ut $A^T A$ når $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Oppgave 3.
Vi betrakter det lineære systemet $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, hvor

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & 2 & 3 \\ a & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ 3-a \end{pmatrix}$$

og a er en parameter.

a) **(6p)** Løs det lineære systemet når $a = 1$.

b) **(6p)** Finn determinanten $\det(A)$, og bestem verdiene av a slik at $\det(A) = 0$.

c) **(6p)** Bestem alle verdier av a slik at $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ har uendelig mange løsninger.

d) **(6p)** Regn ut $A^2 - 3A$ når $a = 1$.

Oppgave 4.
Vi betrakter det lineære likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ når matrisen A og vektorene $\mathbf{x}$ og $\mathbf{b}$ er gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 2-s & 3 & 3 \\ 3 & 2-s & 3 \\ 3 & 3 & 2-s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ s+4 \\ 1-2s \end{pmatrix}$$

Vi betrakter s som en parameter og x,y,z som variable.

a) **(6p)** Løs det lineære systemet når $s = 8$. Hvor mange frihetsgrader har systemet?

b) **(6p)** Regn ut $|A|$ for en vilkårlig verdi av s.

c) **(6p)** Finn A^{-1} når $s = 0$, og bruk A^{-1} til å løse det lineære systemet i dette tilfellet.

d) **(6p)** For hvilke verdier av s har det lineære systemet eksakt én løsning? Finn x i disse tilfellene.

Oppgave 5.
Regn ut de partiellderiverte f'_x og f'_y når:

a) $f(x,y) = 2x + 3y$

b) $f(x,y) = x^2 - y$

c) $f(x,y) = 3x^2 + xy - y^2$

d) $f(x,y) = x^3 + 3xy + 2y^3 - 2x$

e) $f(x,y) = x^2 \ln y$

f) $f(x,y) = e^{xy}$

g) $f(x,y) = xe^y - ye^x$

h) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

i) $f(x,y) = \ln(x^2 + xy + y^2)$

Oppgave 6.
Regn ut de partiellderiverte f'_x og f'_y når:

a) $f(x,y) = \dfrac{1}{x + y}$

b) $f(x,y) = \dfrac{2x + 3y}{xy}$

c) $f(x,y) = \dfrac{xy}{2x - y}$

d) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

e) $f(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

f) $f(x,y) = \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x}$

Svar på veiledningsoppgaver

Oppgave 1.

a) $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -5 & -5 & 5 \end{pmatrix}$

c) A er ikke invertibel

Oppgave 2.

a) Nei

b) Ja

c) $\begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 \\ 8 & 10 & 0 \\ 6 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

Oppgave 3.

a) $(x,y,z) = (2,0,-1)$

b) $|A| = -a(2a + 3)$, og $|A| = 0$ for $a = 0$ og $a = -3/2$

c) $a = 0$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \\ 1 & -2 & 10 \end{pmatrix}$

Oppgave 4.

a) Det er altså én frihetsgrad for $s = 8$, og løsningene er $(x,y,z) = (z-2, z-3, z)$ der z er fri.

b) $|A| = -s^3 + 6s^2 + 15s + 8$

c) $A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ og $(x,y,z) = (0,-1,2)$ for $s = 0$.

d) For $s \neq -1, 8$ har systemet eksakt én løsning, med x-koordinat $x = 0$.

Oppgave 5.

a) $f'_x = 2,\ f_y = 3$

b) $f'_x = 2x,\ f_y = -1$

c) $f'_x = 6x + y,\ f_y = x - 2y$

d) $f'_x = 3x^2 + 3y - 2,\ f_y = 3x + 6y^2$

e) $f'_x = 2x \ln y,\ f_y = x^2/y$

f) $f'_x = ye^{xy},\ f_y = xe^{xy}$

g) $f'_x = e^y - ye^x,\ f_y = xe^y - e^x$

h) $f'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad f_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

i) $f'_x = \dfrac{2x+y}{x^2+xy+y^2}, \quad f_y = \dfrac{x+2y}{x^2+xy+y^2}$

Oppgave 6.

a) $f'_x = f'_y = -\dfrac{1}{(x+y)^2}$

b) $f'_x = -\dfrac{2}{y^2}, \quad f'_y = -\dfrac{3}{x^2}$

c) $f'_x = \dfrac{-y^2}{(2x-y)^2}, \quad f'_y = \dfrac{2x^2}{(2x-y)^2}$

d) $f'_x = \dfrac{-2x}{(x^2+y^2)^2},\ f'_y = \dfrac{-2y}{(x^2+y^2)^2}$

e) $f'_x = \dfrac{-1}{x^2}, \quad f'_y = \dfrac{-1}{y^2}$

f) $f'_x = \dfrac{1}{y} + \dfrac{y}{x^2}, \quad f'_y = \dfrac{-x}{y^2} - \dfrac{1}{x}$