Veiledningsoppgaver

Oppgave 1.
Vi ser på funksjonen $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2$.

a) Vis at nivåkurven $f(x,y) = c$ er en ellipse når $c > -1$, og bestem sentrum (x_0,y_0) for ellipsen og dens halvakser a og b. Bruk dette til å skissere nivåkurvene for $c = 0, 1, 2, 3$ i samme koordinatsystem.

b) Finn tangentlinjene til nivåkurven gjennom $(x,y) = (1,1)$ og gjennom $(x,y) = (2,1/2)$, og tegn inn tangentene.

c) Finn $\nabla f(1,1)$ og $\nabla f(2,1/2)$, og tegn disse inn. Hva skjer med funksjonsverdiene langs gradienten?

d) Ser det ut som om funksjonen f har en minimums- eller maksimumsverdi? Forklar hvorfor/hvorfor ikke.

Oppgave 2.
Finn de partiellderiverte f'_x og f'_y når

a) $f(x,y) = 2x + 3y$

b) $f(x,y) = x^2 + y^2$

c) $f(x,y) = 4x^2 - 6xy + 9y^2$

d) $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2$

e) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

f) $f(x,y) = y^2 - x^3 + 3x$

g) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

h) $f(x,y) = \ln(x^2y^2 - x^2 - y^2 + 3)$

Oppgave 3.
Finn Hesse-matrisen $H(f)$, og regn ut $H(f)(1,1)$:

a) $f(x,y) = 2x + 3y$

b) $f(x,y) = x^2 + y^2$

c) $f(x,y) = 4x^2 - 6xy + 9y^2$

d) $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2$

e) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

f) $f(x,y) = y^2 - x^3 + 3x$

g) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

h) $f(x,y) = \ln(x^2y^2 - x^2 - y^2 + 3)$

Oppgave 4.
Finn gradienten $\nabla f(1,1)$ til f i punktet $(1,1)$, og bruk dette til å finne den retningsderiverte $f'_{\mathbf{a}}(1,1)$ til $f(x,y)$ i punktet $(1,1)$ langs vectoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}^T$:

a) $f(x,y) = 2x + 3y$

b) $f(x,y) = x^2 + y^2$

c) $f(x,y) = 4x^2 - 6xy + 9y^2$

d) $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2$

e) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

f) $f(x,y) = y^2 - x^3 + 3x$

g) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

h) $f(x,y) = \ln(x^2y^2 - x^2 - y^2 + 3)$

Eivind Eriksen, Kontor B4-032, eivind.eriksen@bi.no
https://www.dr-eriksen.no/teaching/MET1180/
Handelshøyskolen BI
BSc Økonomi og ledelse

Oppgave 5.
Bestem tangentlinjen til nivåkurven $f(x,y) = c$ i $(x,y) = (1,1)$:

a) $f(x,y) = 2x + 3y,\ c = 5$
b) $f(x,y) = x^2 + y^2,\ c = 2$
c) $f(x,y) = 4x^2 - 6xy + 9y^2,\ c = 7$
d) $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2,\ c = 3$
e) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3,\ c = -1$
f) $f(x,y) = y^2 - x^3 + 3x,\ c = 3$
g) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2},\ c = \sqrt{2}$
h) $f(x,y) = \ln(x^2y^2 - x^2 - y^2 + 3),\ c = \ln 2$

Oppgave 6.
Vis at gradienten $\nabla f(a,b)$ står normalt på tangentlinjen til nivåkurven $f(x,y) = c$ i punktet (a,b), og at f vokser om vi går et kort stykke langs gradienten.

Oppgave 7.
Vi ser på nivåkurven $f(x,y) = c$ til funksjonen $f(x,y) = x^2 + 4x + y^2 - 2y$. Hva slags kurve er dette? Beskriv gradienten til f i et punkt på nivåkurven geometrisk.

Oppgave 8.
Oppgaver fra læreboken: 7.3.3 - 7.3.5, 7.5.1 - 7.5.5

Svar på veiledningsoppgaver

Oppgave 1.

a) Ellipser med sentrum i $(1,0)$ med halvakser $a = \sqrt{c+1}$ og $b = \sqrt{c+1}/2$.

b) Tangentlinjene har likning $y = 1$ og $y = -x/2 + 3/2$.

c) $\nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 8 \end{pmatrix}^T$, og $\nabla f(2,1/2) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}^T$, og funksjonsverdiene øker når vi beveger oss langs gradienten.

d) Ingen maksimumsverdi (halvaksen blir større jo større c er). Minimumsverdi $f(1,0) = -1$.

Oppgave 2.

a) $f'_x = 2,\ f'_y = 3$
b) $f'_x = 2x,\ f'_y = 2y$
c) $f'_x = 8x - 6y,\ f'_y = -6x + 18y$
d) $f'_x = 2x - 2,\ f'_y = 8y$
e) $f'_x = 3x^2 - 3y,\ f'_y = -3x + 3y^2$
f) $f'_x = -3x^2 + 3,\ f'_y = 2y$
g) $f'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ f'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$
h) $f'_x = \dfrac{2x(y^2-1)}{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 3},\ f'_y = \dfrac{2y(x^2-1)}{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 3}$

Oppgave 3.

a) $H(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ H(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $H(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ H(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) $H(f) = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 18 \end{pmatrix},\ H(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 18 \end{pmatrix}$

d) $H(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix},\ H(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

e) $H(f) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix},\ H(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

f) $H(f) = \begin{pmatrix} -6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ H(f)(1,1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

g) $H(f) = (x^2+y^2)^{-3/2} \cdot \begin{pmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{pmatrix},\quad H(f)(1,1) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/4 & -\sqrt{2}/4 \\ -\sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/4 \end{pmatrix}$

h) $H(f) = (x^2y^2 - x^2 - y^2 + 3)^{-2} \cdot \begin{pmatrix} 2(y^2-1)(-x^2y^2 + x^2 - y^2 + 3) & 8xy \\ 8xy & 2(x^2-1)(-x^2y^2 - x^2 + y^2 + 3) \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Oppgave 4.

a) $\nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}^T$, $f'_{\mathbf{a}}(1,1) = 2a_1 + 3a_2$

b) $\nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}^T$, $f'_{\mathbf{a}}(1,1) = 2a_1 + 2a_2$

c) $\nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 12 \end{pmatrix}^T$, $f'_{\mathbf{a}}(1,1) = 2a_1 + 12a_2$

d) $\nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 8 \end{pmatrix}^T$, $f'_{\mathbf{a}}(1,1) = 8a_2$

e) $\nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^T$, $f'_{\mathbf{a}}(1,1) = 0$

f) $\nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}^T$, $f'_{\mathbf{a}}(1,1) = 2a_2$

g) $\nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^T$, $f'_{\mathbf{a}}(1,1) = (a_1{+}a_2)/\sqrt{2}$

h) $\nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^T$, $f'_{\mathbf{a}}(1,1) = 0$

Oppgave 5.

a) $y = -2x/3 + 5/3$

b) $y = -x + 2$

c) $y = -x/6 + 7/6$

d) $y = 1$

e) Ingen tangentlinje

f) $y = 1$

g) $y = -x + 2$

h) Ingen tangentlinje

Oppgave 7.

Kurven er en sirkel med sentrum i $(-2{,}1)$ og radius $\sqrt{c+5}$. Gradienten peker bort fra sirkelens sentrum.

Oppgave 8.

Fullstendig løsning finnes i oppgaveboken [O].