Innlevering II, MET1180

1. $f(x) = 2x^2 - 12x + 15$

$$= 2(x^2 - 6x) + 15$$

$$= 2(x^2 - 6x + 9) + 15 - 2 \cdot 9$$

$$= \underline{2 \cdot (x-3)^2 - 3}$$

$a = 2$

$x_0 = 3$

$\underline{\underline{y_0 = -3}}$

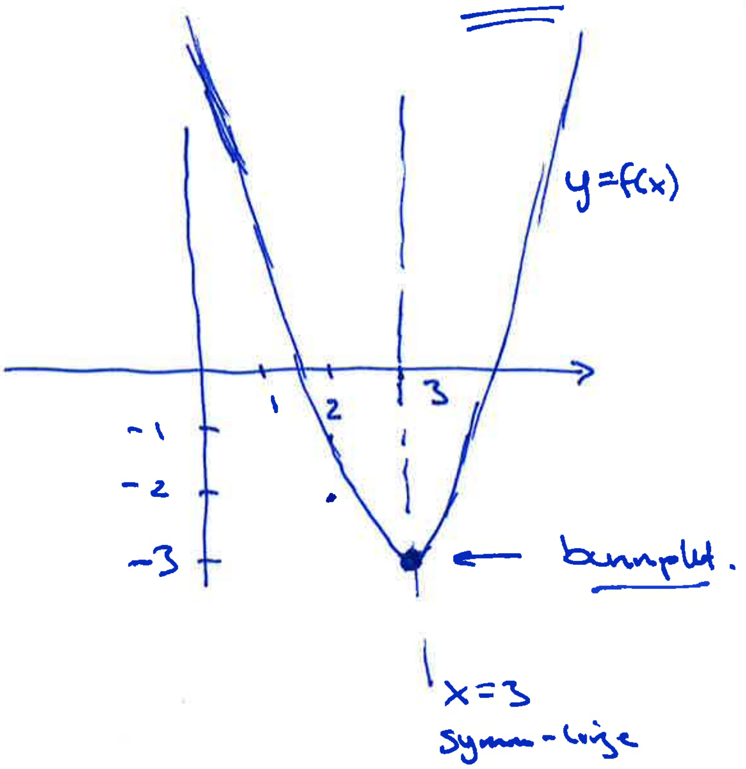
Symmetri-linje: $x = x_0$

$\underline{\underline{x = 3}}$

Funksjonsverdi i $x = 3$:

$y = f(3) = -3$ siden $y_0 = -3$

$\underline{\underline{y = -3}}$



Krumning $a = 2 > 0$

$\Rightarrow$ $x = 3$ bunnpkt, med y-verdi $y = -3$

$V_f = \underline{\underline{[-3, \rightarrow)}}$ siden $y = f(x) \geq -3$

2.

a) $x^2+y^2 = 4x-6y+3$

$$x^2-4x \quad + y^2+6y = 3$$

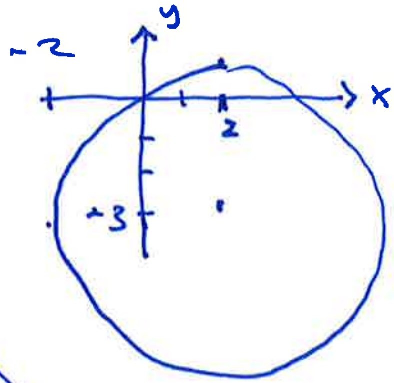
$$(x^2-4x+4)+(y^2+6y+9) = 3+4+9$$

$$\underline{\underline{(x-2)^2+(y+3)^2 = 16 = 4^2}}$$

sirkel,

sentrum: $\underline{(2,-3)}$

radius $r=\underline{4}$



b) $4x^2+9y^2 = 8x-18y+23$

$$4x^2-8x \quad + 9y^2+18y = 23$$

$$4(x^2-2x \quad)+9(y^2+2y) = 23$$

$$4(x^2-2x+1)+9(y^2+2y+1) = 23+4\cdot 1+9\cdot 1$$

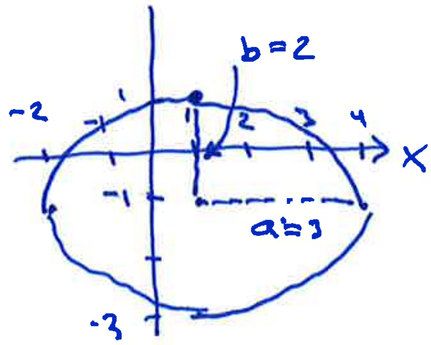
$$\frac{4(x-1)^2+9(y+1)^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\underline{\underline{\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{4} = 1}}$$

$\underline{\text{ellipse}}$

sentrum: $\underline{(1,-1)}$

halvakser $\underline{a=3}$ $\underline{b=2}$
$(\sqrt{9})$ $(\sqrt{4})$



c) $x^2+4y^2 = 2x+8y-7$

$$x^2-2x \quad + 4y^2-8y = -7$$

$$(x^2-2x+1)+4(y^2-2y+1) = -7+1+4\cdot 1$$

$$\underline{\underline{(x-1)^2+4(y-1)^2 = -2}}$$

ingen pkt. siden

$(x-1)^2+4(y-1)^2 \geq 0$

$\neq$

-2

$\underline{\underline{\text{ingen figur}}}$

3. $f(x) = x^3 - x$

a) Nullpkt.: $f(x) = x^3 - x = 0$

$$x(x^2-1) = 0$$

$x = 0$ eller $x^2 = 1$

$x = \pm 1$

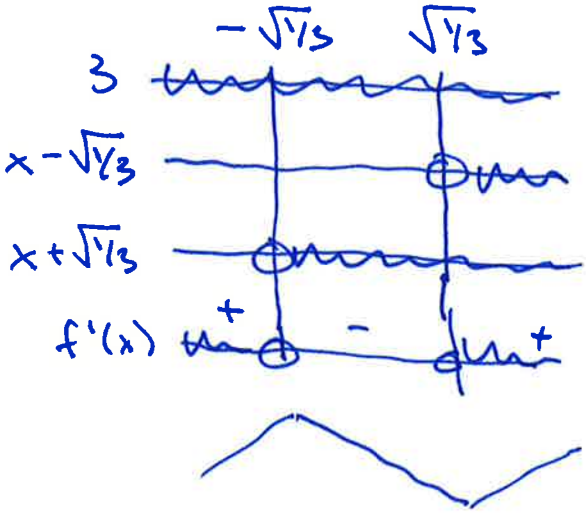
Nullpkt.: $x=0$, $x=1$, $x=-1$

Skj.pkt med y-akse: $x = 0$

$y = f(0) = 0 \Rightarrow y = 0$

b) $f'(x) = 3x^2 - 1$

$$= 3(x^2 - 1/3) = 3(x - \sqrt{1/3})(x + \sqrt{1/3})$$



f strengt voksende i $[\sqrt{1/3}, \rightarrow)$

og $(\leftarrow, -\sqrt{1/3}]$

f strengt avtagende i $[-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}]$

$$\left(\begin{array}{l} \sqrt{1/3} \simeq 0{,}577 \\ -\sqrt{1/3} \simeq -0{,}577 \end{array} \right)$$

c) Stasjonære pkt.: $f'(x) = 0$ $\quad x = \sqrt{1/3}$ og $x = -\sqrt{1/3}$

Lokale maks: $x = -\sqrt{1/3}$ med $f(-\sqrt{1/3}) = -\sqrt{1/3}\,(1/3 - 1) = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}$

Lokale min: $x = \sqrt{1/3}$ med $f(\sqrt{1/3}) = \sqrt{1/3}\,(1/3 - 1) = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$

bruker at $f(x) = x^3 - x$

$= x\cdot(x^2 - 1)$

$f(x) = x^3 - x, \quad D_f = [a, \to)$

d) Vi har at f er strengt voksende på $D_f = [a, \to)$ hvis $a \geq \sqrt{1/3}$. Den minste verdien er $\underline{a = \sqrt{1/3}} \simeq 0{,}577$

$\underline{\text{Siden } f \text{ voksende} \Rightarrow f^{-1} \text{ fins.}}$

<u>Konklusjon</u>: $a = \sqrt{1/3}$

$D_f = [\sqrt{1/3}, \to) \Rightarrow \underline{f^{-1} \text{ fins}}.$

$y = f(x) = x^3 - x \rightsquigarrow$ Vanskelig å løse denne ligningen for x (dvs vanskelig å finne $f^{-1}(x)$ ved hjelp av en formel).

Men vi har:

$D_f = [\sqrt{1/3}, \to)$

$V_f = [-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}, \to) \leftarrow$ Siden f er voksende når $x \geq \sqrt{1/3}$ og $f(x) \to \infty$ når $x \to \infty$

$\Downarrow$

$D_{f^{-1}} = V_f = \underline{\underline{[-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}, \to)}}$

$V_{f^{-1}} = D_f = \underline{\underline{[\sqrt{1/3}, \to)}}$

4. $f(x) = \dfrac{x^2-5x+4}{x-3}$

a) Nullpkt: $f(x) = \dfrac{x^2-5x+4}{x-3} = 0 \Rightarrow x^2-5x+4=0$

$(x-4)(x-1)=0$

$x=4 \quad x=1 \quad \leftarrow$ (gir ikke nevner$=0$)

Skj. med y-aksen: $f(0) = 4/-3$

$y = -4/3$

b) $f'(x) = \dfrac{(2x-5)\cdot(x-3) - (x^2-5x+4)\cdot 1}{(x-3)^2} = \dfrac{(2x^2-11x+15)-(x^2-5x+4)}{(x-3)^2}$

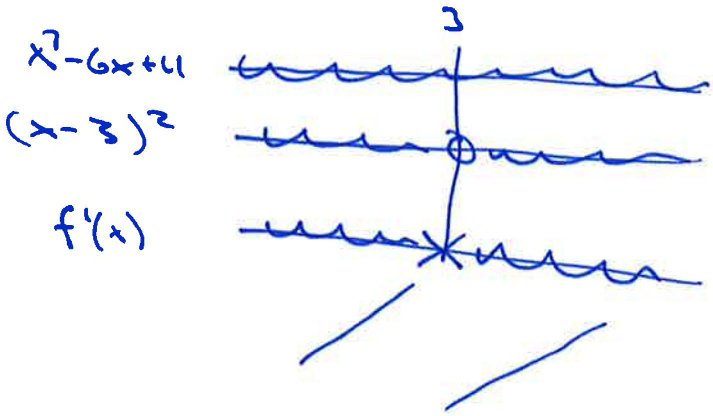
$= \dfrac{x^2-6x+11}{(x-3)^2} \quad \leftarrow$ telleren kan ikke faktoriseres siden $x^2-6x+11=0 \Rightarrow x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-44}}{2} = 3 \pm \frac{1}{2}\sqrt{-8}$

$\Rightarrow$ telleren er alltid positiv

f strengt voksende i $(3, \rightarrow)$

—"— i $(\leftarrow, 3)$

(f/f' ikke defn. i $x=3$)



c) Vertikale asymptoter:

Nevner $x-3=0$, $x=3$

teller $= 3^2-5\cdot 3+4 = 13-15=-2 \neq 0$ i $x=3$

$\Rightarrow x=3$ er vertikal asymptote

Horisontale/Skrå asymptoter:

$(x^2-5x+4):(x-3) = x-2$

$-(x^2-3x)$

$-2x+4$

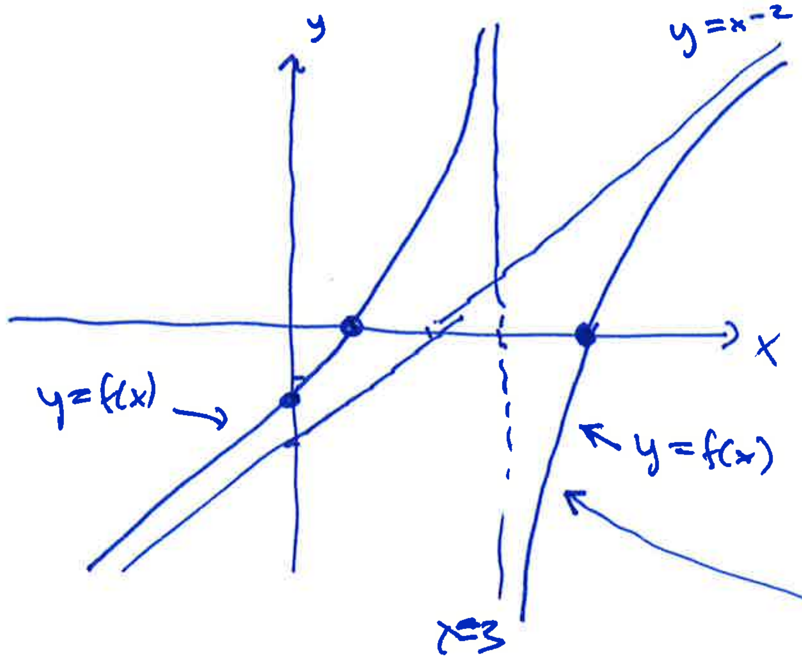
$-(-2x+6)$

-2

$f(x) = x-2+\dfrac{-2}{x-3}$

$\Downarrow$

$y=x-2$ er skrå asymptote



Asymptoter, nullpkt / skj. med y-aksen er tegnet inn.

f er voksende i $(3, \rightarrow)$ og i $(\leftarrow, 3)$

Antar fra nå av: $x > 3 \iff D_f = (3, \rightarrow)$

d) f er voksende i $D_f = (3, \rightarrow)$ fra b) $\Rightarrow$ f^{-1} fins.

$D_{f^{-1}} = V_f = \mathbb{R}$ $\leftarrow$

$V_{f^{-1}} = D_f = (3, \rightarrow)$ $\leftarrow$

Mulige $\left\{ \begin{array}{l} \text{y-verdier i } V_f \\ \text{x-verdier i } D_f \end{array} \right\}$

e) For $x > 3$ betrakter vi ulikheten

$$f(x) = \frac{x^2-5x+4}{x-3} < 2x-5$$

$$0 < 2x-5 - \frac{x^2-5x+4}{x-3}$$

$$0 < \frac{(2x-5)(x-3)-(x^2-5x+4)}{x-3}$$

Merk at dette er samme uttrykket som $f'(x)$ i b)

$$0 < \frac{x^2-6x+11}{x-3}$$

$\leftarrow$ alltid pos.

$\leftarrow$ pos. siden $x > 3$

Ulikhet oppfylt for alle $x > 3$

$\Updownarrow$

$$\boxed{f(x) < 2x-5 \text{ for } x > 3}$$

Omvendt funksjon:

$$y = f(x) = \frac{x^2-5x+4}{x-3}$$

må løse likningen for $\underline{x}$!

$$y\cdot(x-3) = x^2-5x+4$$

$$0 = x^2-5x-yx+4+3y$$

$$x^2-(5+y)x+(4+3y)=0$$

$$x = \frac{(5+y)\pm\sqrt{(5+y)^2-4\cdot(4+3y)}}{2}$$

$$= \frac{5+y \pm \sqrt{y^2+10y-12y+25-16}}{2}$$

$$= \frac{5+y \pm \sqrt{y^2-2y+9}}{2}$$

$y^2-2y+9 =$
$(y-1)^2+8>0$
for alle y

$$x = \frac{5+y+\sqrt{y^2-2y+9}}{2}$$

$$= f^{-1}(y)$$

$\Downarrow$

$$f^{-1}(x) = \frac{5+x+\sqrt{x^2-2x+9}}{2}$$

er den omvendte funksjonen.

Fra hint. i oppgaven er

$f(x) < 2x-5$

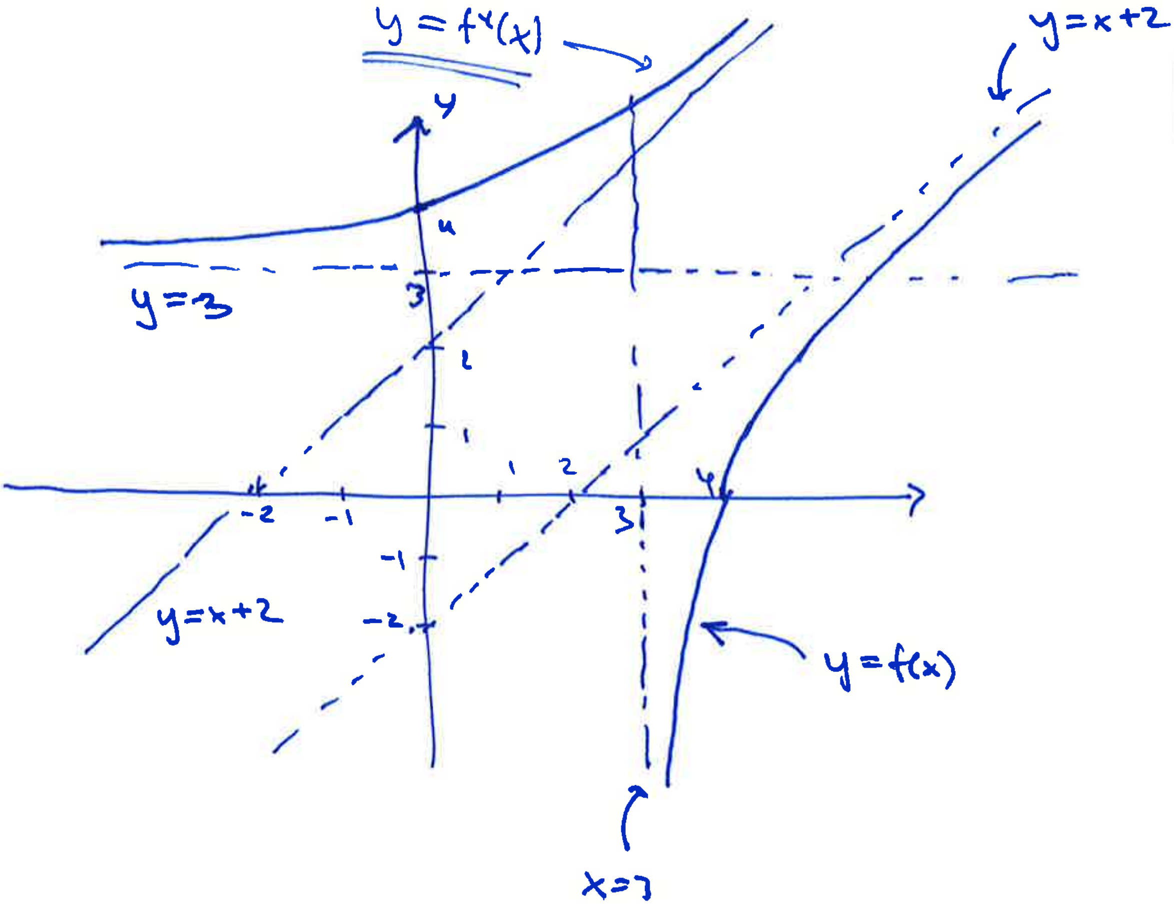
$y < 2x-5$

$y+5 < 2x$

$\frac{y+5}{2} < x$

når $x>3$, dvs at fortegnet skal være $+$

f)



Skisse: grafen til $y = f(x)$ for $x > 3$

samt $x = 3$ og $y = x - 2$

$\downarrow$ speilet om linjen $y = x$

grafen til $y = f^{-1}(x)$ $\left\{ \begin{array}{l} D_{f^{-1}} = \mathbb{R}^3 \\ V_{f^{-1}} = (3, \to) \end{array} \right.$

samt $y = 3$ og $\left. \begin{array}{l} x = y - 2 \\ y = x + 2 \end{array} \right\}$ speiling av asymptotene.