Løsning Øvingsoppgaver	Kap 4: Derivasjon
MET 1180 Matematikk	Mars 2017

Oppgave 1.

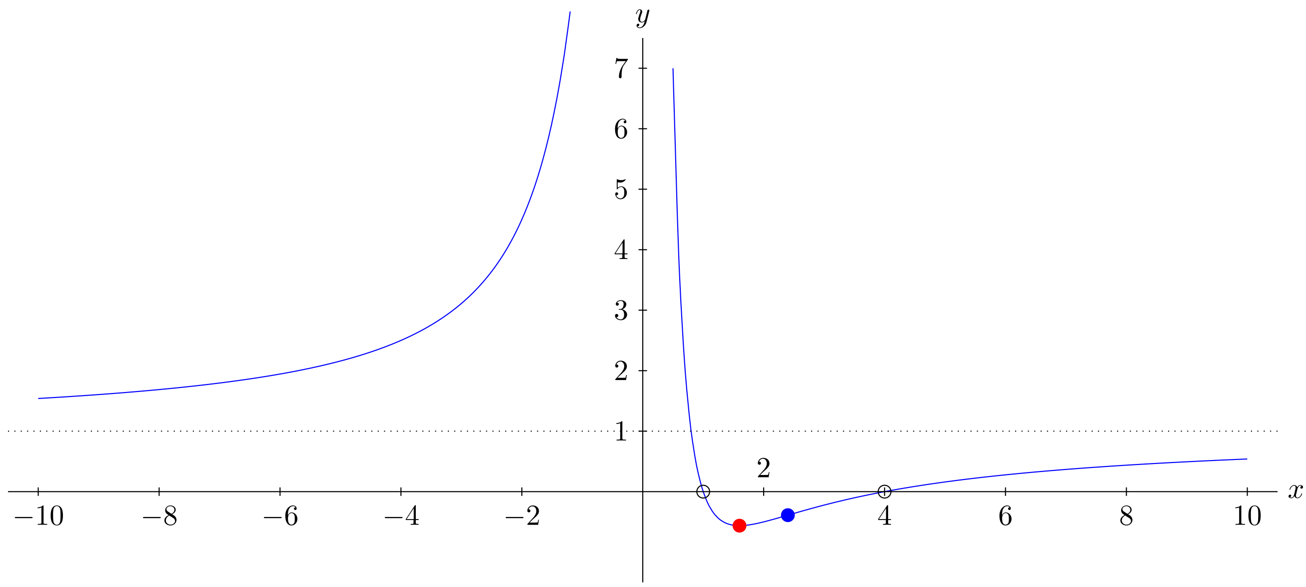
(a) Vi har at $f(x) = 0$ når $x^2 - 5x + 4 = 0$, og dette gir $x = 1$ og $x = 4$. Vi faktoriserer funksjonsuttrykket som
$$f(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{x^2}$$
og setter opp fortegnsskjema for $f(x)$. Dette gir $f(x) > 0$ når $x > 4$, når $0 < x < 1$ og når $x < 0$, og at $f(x) < 0$ når $1 < x < 4$.

(b) Vi regner ut $f'(x)$ ved å bruke kvotientregelen, og får at
$$f'(x) = \frac{(2x-5)x^2 - (x^2-5x+4)\cdot 2x}{x^4} = \frac{(2x-5)x - 2(x^2-5x+4)}{x^3} = \frac{5x-8}{x^3}$$
Vi setter opp fortegnsskjema for $f'(x)$, og ser at $x = 8/5 = 1{,}6$ er et lokalt minimumspunkt.

(c) Vi regner ut $f''(x)$ ved å bruke kvotientregelen, og får at
$$f''(x) = \frac{5x^3 - (5x-8)\cdot 3x^2}{x^6} = \frac{5x - 3(5x-8)}{x^4} = \frac{-10x+24}{x^4}$$
Vi setter opp fortegnsskjema for $f''(x)$, og ser at $x = 12/5 = 2{,}4$ er et vendepunkt, at f er konveks i $(-\infty,0)$ og i $(0,12/5]$, og at f er konkav i $[12/5,\infty)$.

(d) Vi har en vertikal asymptote $x = 0$. Siden polynomdivisjon gir at
$$f(x) = 1 + \frac{-5x+4}{x^2}$$
ser vi at $y = 1$ er horisontal asymptote.

(e) Vi har skissert grafen til f nedenfor med nullpunkter, lokale maksimums- og minimumspunkter, vendepunkter og asymptoter tegnet inn.



Oppgave 2.

(a) Vi har at $f(x) = 0$ når $x^2+2x = x(x+2) = 0$, det vil si for $x = 0$ og $x = -2$. Et fortegnsskjema for $f(x)$ gir at $f(x) > 0$ i $[-5,-2)$ og i $(0,5]$, og at $f(x) < 0$ i $(-2,0)$.

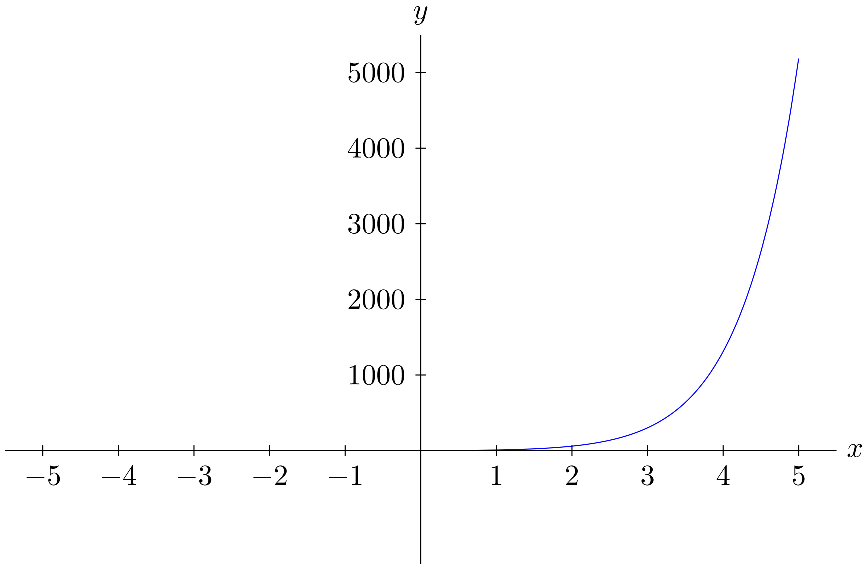
(b) Vi har at $f'(x)$ er gitt ved
$$f'(x) = (2x+2)e^x + (x^2+2x)e^x = (x^2+4x+2)e^x$$
Stasjonære punkter er gitt ved $x^2+4x+2 = 0$, som gir $x = -2 \pm \sqrt{2}$. Fortegnsskjema for $f'(x)$ gir at $x = -2+\sqrt{2}$ er et lokalt minimum, og at $x = -2-\sqrt{2}$ er et lokalt maksimum.

(c) Vi har at $f''(x)$ er gitt ved

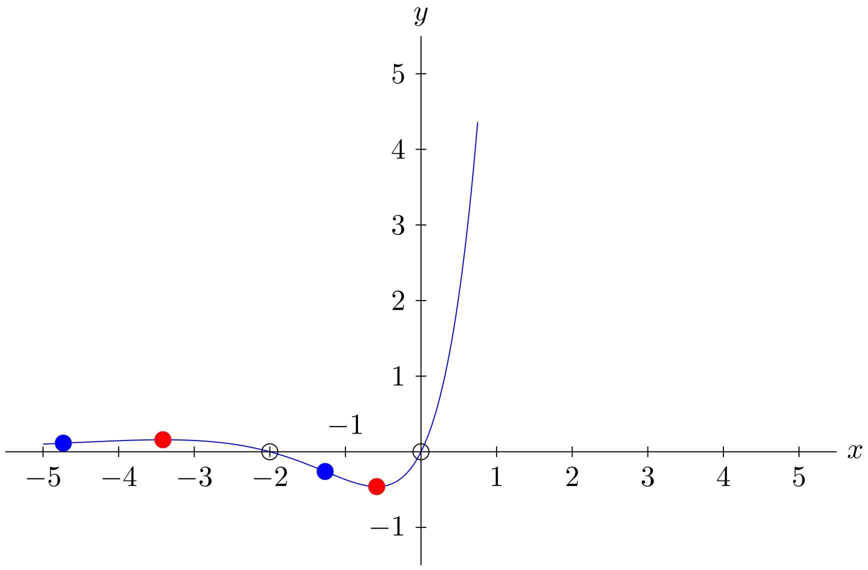
$$f''(x) = (2x+4)e^x + (x^2+4x+2)e^x = (x^2+6x+6)e^x$$

Vendepunkter er gitt ved $x^2+6x+6=0$, som gir $x=-3\pm\sqrt{3}$. Fortegnsskjema for $f''(x)$ gir at f er konveks i $[-5,-3-\sqrt{3}]$ og i $[-3+\sqrt{3},5]$ og at f er konkav i $[-3-\sqrt{3},-3+\sqrt{3}]$.

(d) Grafen til f er skissert nedenfor, med nullpunkter, lokale maksimums- og minimumspunkter, og vendepunkter tegnet inn.



Nedenfor er grafen for $x\le 1$ forstørret. Lokale maks/min er vist med røde punkter og vendepunkt med blå punkter.



(e) Vi ser fra grafen at endepunktet $x=5$ har størst verdi, med $f(5)=35e^5\cong 5.194{,}46$. Det indre lokale maksimum i $x=-2-\sqrt{2}$ har mindre funksjonsverdi. Vi ser også fra grafen at det lokale minimumspunktet i $x=-2+\sqrt{2}$ har minst funksjonsverdi, med $f(-2-\sqrt{2})\cong -0{,}46$. Endepunktet $x=-5$ har positiv funksjonsverdi $f(-5)=15e^{-5}\cong 0{,}10$.

Oppgave 3.

(a) Vi har at f' er gitt ved

$$f'(x) = 2\ln(2x+1) + (2x+1)\cdot\frac{1}{2x+1}\cdot 2 = 2\ln(2x+1)+2$$

Stasjonære punkter er gitt ved $f'(x) = 2\ln(2x+1) + 2 = 0$. Dette gir $\ln(2x+1) = -1$, eller $2x + 1 = e^{-1} = 1/e$, det vil si $x = x^*$ med

$$x^* = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e} - 1\right) = \frac{1-e}{2e} \cong -0{,}316 < 0$$

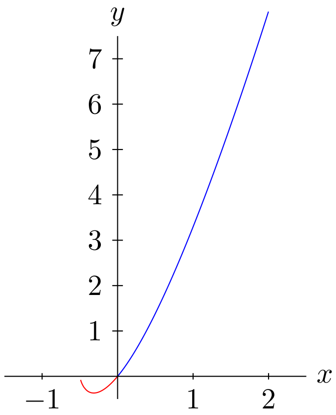
Vi ser at x^* er utenfor definisjonsområdet. Det betyr at f er voksende i intervallet $[0{,}2]$.

(b) Siden $f'(x) > 0$ for alle x i $[0{,}2]$, har f ingen stasjonære punkter. Hvis definisjonsområdet hadde vært utvidet til $(-1/2{,}2]$, så ville $x = x^*$ vært et stasjonært punkt, og ved andrederivert-testen ville det vært et lokalt minimumspunkt siden vi har

$$f''(x) = \frac{4}{2x+1} \quad \Rightarrow \quad f''(x^*) = \frac{4}{e^{-1}} = 4e > 0$$

(c) De eneste mulige lokale maksimums- og minimumspunkter er endepunktene $x = 0$ og $x = 2$. Siden f er voksende, er $x = 0$ et minimumspunkt og $x = 2$ et maksimumspunkt. Minimumsverdien er $f(0) = 0$, og maksimumsverdien er $f(2) = 5\ln(5) \cong 8{,}05$.

(d) Grafen til f er skissert nedenfor. Den røde delen er ikke egentlig med i grafen siden definisjonsområdet var $[0{,}2]$, men ville vært med på grafen om vi utvidet definisjonsområdet til $(-1/2{,}2]$.



Oppgave 4.

En bedrift har kostnadsfunksjonen

$$C(x) = 205x^3 - 120x^2 + 2000x + 2800, \quad x \geq 0$$

(a) Vi har at grensekostnaden $C'(x)$ er gitt ved

$$C'(x) = 205 \cdot 3x^2 - 120 \cdot 2x + 2000 = 615x^2 - 240x + 2000$$

Grensekostnaden er 2000 når

$$C'(x) = 615x^2 - 240x + 2000 = 2000 \quad \Rightarrow \quad 615x^2 - 240x = 0$$

Dette skjer for $x = 0$ og for $x = 240/615 = 80/205 = 16/41$.

(b) Siden grensekostnaden $C'(x) = 615x^2 - 240x + 2000$ er en kvadratisk funksjon, så har den minimumsverdien på symmetrilinjen, det vil si $x = 8/41$. Man kan også finne minimum ved å derivere grensekostnaden.

(c) Vi har at $C'(x) = 615x^2 - 240x + 2000 = 0$ gir

$$x = \frac{240 \pm \sqrt{240^2 - 4 \cdot 615 \cdot 2000}}{2 \cdot 615} = \frac{240 \pm \sqrt{-4862400}}{1230}$$

og dermed ingen stasjonære punkter for C i $x \geq 0$. Siden $C'(0) = 2000 > 0$ er positiv, betyr det at $C'(x) > 0$ for alle $x \geq 0$, og kostnadsfunksjonen C er voksende.

(d) Enhetskostnaden er gitt ved

$$A(x) = \frac{C(x)}{x} = 205x^2 - 120x + 2000 + \frac{2800}{x}$$

Hvis den er minimal, så er enhetskostnaden lik grensekostnaden. Det gir $A(x) = C'(x)$, eller

$$205x^2 - 120x + 2000 + \frac{2800}{x} = 615x^2 - 240x + 2000 \quad \Rightarrow \quad 410x^2 - 120x = \frac{2800}{x}$$

Multiplikasjon med x gir likningen

$$410x^3 - 120x^2 = 2800 \quad \Rightarrow \quad 410x^3 - 120x^2 - 2800 = 0$$

Vi prøver med heltallene $x = \pm 1, \pm 2, \dots$ som går opp i 2800, og ser at $x = 2$ er en løsning. Det er ingen andre løsninger, siden

$$410x^3 - 120x^2 - 2800 = (x-2)(410x^2 + 700x - 1400)$$

og den andre kvadratiske faktoren ikke har nullpunkter. Ved å sette opp en fortegnslinje for

$$A'(x) = \frac{C'(x) \cdot x - C(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{C'(x) - A(x)}{x}$$

ser vi at enhetskostnaden er minimal for $x = 2$. Enhetskostnaden er da $A(2) = 3.980$.

(e) I punktet $x = 2$ er $C'(2) = 3.980$ og kostnaden er $C(2) = 7.960$. Dermed er tangenten til kostnadskurven i dette punktet gitt ved

$$y - C(2) = C'(2) \cdot (x-2) \quad \Rightarrow \quad y - 7960 = 3980(x-2) \quad \Rightarrow \quad y = 3980x$$