Oppgave 1.

Vi bruker Gauss-eliminasjon: Vi finner den utvidede matrisen til systemet i hvert tilfelle, og bruker elementære radoperasjoner til vi har en trappeform.

(a) Elementære radoperasjoner gir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Vi ser fra pivotposisjonene at det er én løsning, og den finner vi ved baklengs substitusjon. Siste likning gir $z = 1$, andre likning gir $y = 3$, og første likning gir $x = 6 - y - z = 2$. Løsningen er derfor $(x,y,z) = (2,3,1)$.

(b) Elementære radoperasjoner gir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ -1 & 8 & -19 & 18 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 11 & -12 \\ 0 & 10 & -22 & 24 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 11 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vi ser fra pivotposisjonene at det er én fri variabel z og uendelig mange løsninger. Vi finner løsningene eksplisitt ved baklengs substitusjon. Andre likning gir $-5y = -11z - 12$, eller $y = 11z/5 + 12/5$, og første likning gir $x = 6 - 2y + 3z = 6 - 22z/5 - 24/5 + 3z = 6/5 - 7z/5$. Løsningene er $(x,y,z) = (6/5 - 7z/5, 11z/5 + 12/5, z)$ med z som fri variabel.

Oppgave 2.

(a) Determinanten er

$$\begin{vmatrix} 2 & a \\ 1-a & 3 \end{vmatrix} = 6 - a(1-a) = a^2 - a + 6$$

(b) Determinanten er gitt ved kofaktorutvikling langs første rad:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & h \\ 1 & -1 & 1 \\ h & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1(-4-2) - (4-h) + h(2+h) = h^2 + 3h - 10$$

(c) Determinanten er gitt ved kofaktorutvikling langs første rad:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 4 \\ 1 & a & 2 \\ 4 & 2 & a \end{vmatrix} = a(a^2-4) - (a-8) + 4(2-4a) = a^3 - 21a + 16$$

Oppgave 3.

(a) Vi finner determinanten til koeffisientmatrisen A til systemet:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 8 & -h \end{vmatrix} = 1(h-40) - 2(-2h+5) - 3(16-1) = 5h - 95 = 5(h-19)$$

Dermed har systemet én løsning for $h \neq 19$, siden dette gir $\det(A) \neq 0$.

(b) Andre verdier av h er kun $h = 19$. Siden $\det(A) = 0$ for $h = 19$, har systemet ingen eller uendelig mange løsninger. Vi bruker Gauss-eliminasjon for å finne løsningene når $h = 19$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 5 \\ -1 & 8 & -19 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 11 & 5 \\ 0 & 10 & -22 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 11 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

Vi ser fra pivotposisjonene at systemet er inkonsistent (har ingen løsninger) for $h = 19$.

(c) For $h \neq 19$ vet vi at det er én løsning av systemet, og vi finner denne løsningen ved å bruke Kramers regel:

$$\det(A_1(\mathbf{b}) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 5 \\ -4 & 8 & -h \end{vmatrix} = -2(-5h+20) - 3(40-4) = 10h - 148$$

$$\det(A_2(\mathbf{b}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 5 \\ -1 & -4 & -h \end{vmatrix} = 1(-5h+20) - 3(-8+5) = -5h + 29$$

$$\det(A_3(\mathbf{b}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 8 & -4 \end{vmatrix} = 1(4-40) - 2(-8+5) = -30$$

Siden $\det(A) = 5h - 95$, gir dette løsningen

$$x = \frac{10h - 148}{5h - 95}, \quad y = \frac{-5h + 29}{5h - 95}, \quad z = \frac{-30}{5h - 95}$$

for $h \neq 19$.

Oppgave 4.

Systemet har maksimalt fire pivotposisjoner siden det har fire likninger. Hvis en av pivotposisjonene er i siste kolonne, blir det ingen løsninger. Ellers blir det $6 - r$ frie variable, det $r \leq 4$ er antall pivotposisjoner, og dermed uendelig mange løsninger (minst to frie variabler). Vi viser to mulige eksampler på trappeformer, med pivotposisjonene markert:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \mathbf{1} & 2 & -3 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & \mathbf{-5} & 11 & 4 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{6} & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cccccc|c} \mathbf{1} & 2 & -3 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & \mathbf{-5} & 11 & 4 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{6} & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Oppgave 5.

(a) Vi finner determinanten til A ved kofaktorutvikling langs første rad:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ b & 1 & a \end{vmatrix} = a(a-0) = a^2$$

(b) I denne deloppgaven setter vi $a = b = 1$. Da er $\det(A) = 1 \neq 0$, og derfor eksisterer A^{-1}, og vi kan finne den inverse matrisen ved å bruke formelen

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{11} & C_{12} & C_{13} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & -a & 1-b \\ 0 & a^2 & -a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

I svaret har vi satt inn at $a = b = 1$.

(c) Vi vet at $A^{-1} = A$ hvis og bare hvis $A^2 = I$, siden egenskapen som definerer den inverse matrisen er at $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$. Vi har at

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ a+1 & 1 & 0 \\ 2ab+1 & a+1 & a^2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Derfor er $A^2 = I$ hvis og bare hvis $a^2 = 1$, $a + 1 = 0$ og $2ab + 1 = 0$. De to første likningene gir $a = -1$, og den siste gir $b = 1/2$. Derfor er $A^{-1} = A$ hvis og bare hvis $a = -1$ og $b = 1/2$.

Oppgave 6.

(a) Det kan skrives som likningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 4y & - & 3z & + & 7w & = & 1 \\ 2x & - & 5y & + & 3z & - & w & = & -1 \\ 4x & - & y & + & 33z & + & 2w & = & 3 \end{array}$$

(b) Vi finner trappeformen ved hjelp av elementære radoperasjoner:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & -3 & 7 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & 33 & 2 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 9 & -15 & -3 \\ 0 & 15 & 45 & -26 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -4 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & \mathbf{3} & 9 & -15 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{49} & 14 \end{array}\right)$$

Vi ser at systemet har en frihetsgrad (z er fri). Løsningene finner vi ved baklengs substitusjon: Den siste likningen gir at $49w = 14$, eller $w = 14/49 = 2/7$. Setter vi dette inn i den andre likningen, gir det $3y = -9z + 15(2/7) - 3 = 9/7 - 9z$, eller $y = 3/7 - 3z$, og første likning gir $x = 4(3/7 - 3z) + 3z - 7(2/7) + 1 = 5/7 - 9z$. På vektorform kan vi skrive dette som

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/7 - 9z \\ 3/7 - 3z \\ z \\ 2/7 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -9 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

der z er fri.

Oppgave 7.

(a) Vi finner determinanten $|A|$ ved kofaktorutvikling langs første rad:

$$\begin{vmatrix} 1+a & 0 & 1 \\ 0 & 1+a & 0 \\ 1 & 0 & 1+a \end{vmatrix} = (1+a)((1+a)^2 - 0) + 1(0 - (1+a)) = (1+a)^3 - (1+a)$$

Dette gir $\det(A) = (1+a)(1+2a+a^2-1) = a(1+a)(2+a)$.

(b) I denne deloppgaven setter vi $a = 1$. Da er $\det(A) = 6 \neq 0$, og A^{-1} kan vi finne ved å bruke formelen

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{11} & C_{12} & C_{13} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(c) Siden $\det(A) = a(1+a)(2+a)$, har systemet én løsning for $a \neq 0, -1, -2$. Vi sjekker antall løsninger for verdiene $a = 0, -1, -2$ som gir $\det(A) = 0$. For $a = 0$ får vi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dette gir uendelig mange løsninger, en fri variabel z, og løsninger $x = 2 - z$ og $y = 0$, eller $(x,y,z) = (2-z,0,z)$ med z fri. For $a = -1$ får vi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dette gir uendelig mange løsninger, en fri variabel y, og løsninger $x = 2$ og $z = 2$, eller $(x,y,z) = (2,y,2)$ med y fri. For $a = -2$ får vi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Dette gir ingen løsninger. Vi har altså uendelig mange løsninger for $a = 0$ og $a = -1$.

(d) For $a \neq 0, -1, -2$, har vi at

$$\det(A_1(\mathbf{b}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1+a & 0 \\ 2 & 0 & 1+a \end{vmatrix} = (1+a)(2(1+a)-2) = 2a(1+a)$$

$$\det(A_2(\mathbf{b}) = \begin{vmatrix} 1+a & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1+a \end{vmatrix} = 0$$

$$\det(A_3(\mathbf{b}) = \begin{vmatrix} 1+a & 0 & 2 \\ 0 & 1+a & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (1+a)(2(1+a)-2) = 2a(1+a)$$

Siden $\det(A) = a(1+a)(2+a)$, gir dette løsningen

$$x = \frac{2a(1+a)}{a(1+a)(2+a)} = \frac{2}{2+a}$$

$$y = \frac{0}{a(1+a)(2+a)} = 0$$

$$z = \frac{2a(1+a)}{a(1+a)(2+a)} = \frac{2}{2+a}$$

for $a \neq 0, -1, -2$.

Oppgave 8.

(a) Avkastningen på hver aksje i disse verdipapirene er i hver scenario gitt ved

	Pris A	Pris B	Pris C
Scenario 1	20	10	5
Scenario 2	80	−15	15
Scenario 3	−20	15	−15

La x,y,z være antall tusen aksjer av hvert av de tre verdipapirene vi kjøper. Da er budsjettbetingelsen at $100x + 25y + 45z = 100$, og betingelsene for at avkastningen i de tre scenariene er r_1, r_2 og r_3 tusen kr blir da gitt ved det lineære systemet

$$\begin{array}{rcrcrcr} 20x & + & 10y & + & 5z & = & r_1 \\ 80x & - & 15y & + & 15z & = & r_2 \\ -20x & + & 15y & - & 15z & = & r_3 \\ 100x & + & 25y & + & 45z & = & 100 \end{array}$$

For $r_1 = 21$, $r_2 = 24$, og $r_3 = -6$ løser vi dette lineære systemet ved Gauss-eliminasjon:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 10 & 5 & 21 \\ 80 & -15 & 15 & 24 \\ -20 & 15 & -15 & -6 \\ 100 & 25 & 45 & 100 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 10 & 5 & 21 \\ 0 & -55 & -5 & -60 \\ 0 & 25 & -10 & 15 \\ 0 & -25 & 20 & -5 \end{array}\right)$$

Vi dividerer siste rad på 5 og bytter om andre og fjerde rad for å forenkle regningen. Dette gir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 10 & 5 & 21 \\ 0 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 25 & -10 & 15 \\ 0 & -55 & -5 & -60 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 10 & 5 & 21 \\ 0 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & -49 & -49 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{20} & 10 & 5 & 21 \\ 0 & \mathbf{-5} & 4 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{10} & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dette gir at $z = 1$, at $-5y = -4(1) - 1 = -5$, eller $y = 1$, og at $20x = -10(1) - 5(1) + 21 = 6$, eller at $x = 6/20 = 3/10$. Dette svarer til kjøp av 300 aksjer av verdipapir A, 1000 aksjer av verdipapir B, og 1000 aksjer av verdipapir C.

(b) Dette svarer til at avkastningen (i tusen kr) er slik at $r_1 = r_2 = 0$ og $r_3 > 0$. Vi løser det lineære systemet dette svarer til:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 10 & 5 & 0 \\ 80 & -15 & 15 & 0 \\ -20 & 15 & -15 & r_3 \\ 100 & 25 & 45 & 100 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 10 & 5 & 0 \\ 0 & -55 & -5 & 0 \\ 0 & 25 & -10 & r_3 \\ 0 & -25 & 20 & 100 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 10 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 20 \\ 0 & 25 & -10 & r_3 \\ 0 & -55 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

Vi har i siste overgang dividerert siste rad på 5 og bytter om andre og fjerde rad for å forenkle regningen videre. Vi får

$$\to \left(\begin{array}{ccc|r} 20 & 10 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & 10 & r_3 + 100 \\ 0 & 0 & -49 & -220 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|r} \mathbf{20} & 10 & 5 & 0 \\ 0 & \mathbf{-5} & 4 & 20 \\ 0 & 0 & \mathbf{10} & r_3 + 100 \\ 0 & 0 & 0 & 4{,}9r_3 + 270 \end{array}\right)$$

Hvis $r_3 > 0$, så blir $4{,}9r_3 + 270 \neq 0$, og dermed har systemet ingen løsninger. Det er altså ikke mulig å velge en portefølge av verdipapirer slik at $r_1 = r_2 = 0$ og $r_3 > 0$. Den eneste muligheten med $r_1 = r_2 = 0$, oppstår dersom $4{,}9r_3 + 270 = 0$, det vil si $r_3 = -270/4{,}9 \cong -55{,}1$. Tolkningen er at den eneste porteføljen som gir nullavkastning i de to første scenariene, gir negativ avkastning (omkring -55.102 kr) i det tredje scnariet.

(c) Vi løser systemet for et vilkårlig trippel (r_1, r_2, r_3) av avkastninger i de tre scenariene (i tusen kr). Vi løser det lineære systemet dette svarer til:

$$\left(\begin{array}{ccc|r} 20 & 10 & 5 & r_1 \\ 80 & -15 & 15 & r_2 \\ -20 & 15 & -15 & r_3 \\ 100 & 25 & 45 & 100 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|r} 20 & 10 & 5 & r_1 \\ 0 & -55 & -5 & r_2 - 4r_1 \\ 0 & 25 & -10 & r_3 + r_1 \\ 0 & -25 & 20 & 100 - 5r_1 \end{array}\right)$$

Vi dividerer siste rad på 5 og bytter om andre og fjerde rad for å forenkle regningen. Dette gir

$$\left(\begin{array}{ccc|r} 20 & 10 & 5 & r_1 \\ 0 & -5 & 4 & 20 - r_1 \\ 0 & 25 & -10 & r_3 + r_1 \\ 0 & -55 & -5 & r_2 - 4r_1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|r} 20 & 10 & 5 & r_1 \\ 0 & -5 & 4 & 20 - r_1 \\ 0 & 0 & 10 & 100 + r_3 - 4r_1 \\ 0 & 0 & -49 & -220 + r_2 + 7r_1 \end{array}\right)$$

Til slutt legger vi til 4,9 ganger tredje rad til fjerde rad, som gir

$$\left(\begin{array}{ccc|r} 20 & 10 & 5 & r_1 \\ 0 & -5 & 4 & 20 - r_1 \\ 0 & 0 & 10 & 100 + r_3 - 4r_1 \\ 0 & 0 & 0 & 270 - 12{,}6r_1 + r_2 + 4.9r_3 \end{array}\right)$$

Dette systemet har løsninger hvis og bare hvis $270 - 12{,}6r_1 + r_2 + 4.9r_3 = 0$, og i så fall har systemet eksakt én løsning. Vi kan skrive betingelsen som

$$12{,}6r_1 - r_2 - 4.9r_3 = 270$$

Vi kan for eksempel velge $r_1 = r_2 = 0$ og $r_3 = -270/4{,}9 \cong -55{,}102$ som i forrige deloppgave. En annen mulighet er $r_2 = r_3 = 1$, som gir at $r_1 = 275{,}9/12{,}6 \cong 21{,}897$. Dette svarer til en portefølge som har positiv avkastning i alle scenarier, siden $R_1 \cong 21.897$ kr, $R_2 = 1.000$ kr og $R_3 = 1.000$ kr. Porteføljen kan vi finne ved baklengs substitusjon: Vi får $10z = 100 + r_3 - 4r_1$, eller $z = 10 + 0{,}1r_3 - 0{,}4r_1 \cong 1{,}341$. Setter vi dette inn i andre likning, får vi

$$-5y = -4(10 + 0{,}1r_3 - 0{,}4r_1) + 20 - r_1 \quad \Rightarrow \quad y = 4 - 0{,}12r_1 + 0.8r_3 \cong 2{,}172$$

og setter vi dette inn i først likning, får vi

$$20x = -10(4 - 0.12r_1 + 0.8r_3) - 5(10 + 0{,}1r_3 - 0{,}4r_1) + r_1 \quad \Rightarrow$$
$$x = -4{,}5 + 0{,}2r_1 - 0.425r_3 \cong -0{,}546$$

Løsningen er altså $x \cong -0{,}546$, $y \cong 2{,}172$ og $z \cong 1{,}341$. Dette svarer til at vi kjøper 2.172 aksjer av verdipapir B og 1.341 aksjer av verdipapir C, samtidig som vi selger short 546 aksjer av verdipapir A.