Øvingsoppgaver	Lineære likningssystemer og matriser
MET 1180 Matematikk	Mars 2017

Besvarelser kan leveres inn, helst i grupper på 2-4 studenter, og dere vil få tilbakemeldinger på det som leveres inn. Leveres på forelesning eller på mitt kontor (jeg setter en boks utenfor kontoret), med navn på alle studenter i gruppen. **Frist: Tirsdag 4. april.**

Oppgave 1.

Løs de lineære systemene:

$$a)\ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 6 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 4z & = & 12 \end{array} \qquad b)\ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 6 \\ 2x & - & y & + & 5z & = & 0 \\ -x & + & 8y & - & 19z & = & 18 \end{array}$$

Oppgave 2.

Regn ut determinantene:

$$a)\ \begin{vmatrix} 2 & a \\ 1-a & 3 \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & h \\ 1 & -1 & 1 \\ h & 2 & 4 \end{vmatrix} \qquad c)\ \begin{vmatrix} a & 1 & 4 \\ 1 & a & 2 \\ 4 & 2 & a \end{vmatrix}$$

Oppgave 3.

Vi betrakter det lineære systemet

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 5z & = & 5 \\ -x & + & 8y & - & hz & = & -4 \end{array}$$

(a) For hvilke verdier av h har det lineære systemet én løsning?
(b) Hvilke løsninger har systemet for andre verdier av h?
(c) Bestem løsningene av systemet i de tilfellene det er én løsning.

Oppgave 4.

Et lineært system har fire likninger og seks ukjente. Hvor mange løsninger kan systemet ha? Begrunn svaret ved å markere de mulige pivotposisjonene i trappeformen til systemet.

Oppgave 5.

Vi betrakter matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ b & 1 & a \end{pmatrix}$$

(a) Regn ut $\det(A)$.
(b) Finn A^{-1} når $a = b = 1$.
(c) Finn alle verdier av a og b slik at $A^{-1} = A$.

Oppgave 6.

Vi betrakter det lineære systemet med med matriseform $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, der

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & 7 \\ 2 & -5 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 33 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(a) Skriv ned det lineære systemet som et likningssystem.
(b) Bestem antall frihetsgrader i det lineære systemet, og skriv ned løsningene på vektorform.

Oppgave 7.

Vi betrakter matrisen A og det lineære likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 0 & 1 \\ 0 & 1+a & 0 \\ 1 & 0 & 1+a \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 1+a & 0 & 1 \\ 0 & 1+a & 0 \\ 1 & 0 & 1+a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

der a er en parameter og x,y,z er variable.

(a) Regn ut $|A|$.
(b) Finn A^{-1} når $a = 1$.
(c) Når har $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ uendelig mange løsninger? Løs $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ i disse tilfellene.
(d) Anta at a er slik at $|A| \neq 0$. Løs det lineære systemet ved hjelp av Cramers regel.

Oppgave 8.

Du har 100.000 kr og skal investere i en portefølje av verdipapirer. Du kan velge en kombinasjon av verdipapirene A, B, C med pris $p_A = 100$ kr, $p_B = 25$ kr og $p_C = 45$ kr per aksje på investeringstidspunktet. Vi antar at på et gitt tidspunkt i framtiden, vil ett av tre scenarier slå til. Prisene på verdipapirene i disse scenariene er

	Pris A	Pris B	Pris C
Scenario 1	120	35	50
Scenario 2	180	10	60
Scenario 3	80	40	30

(a) Er det mulig å velge en portefølje av verdipapirer slik av avkastningen i de tre scenariene er henholdvis $R_1 = 21.000$ kr, $R_2 = 24.000$ kr, og $R_3 = -6.000$ kr?
(b) Er det mulig å velge en portefølge av verdipapirer slik at $R_1 = R_2 = 0$ og $R_3 > 0$? Hvilken portefølje bør vi velge? Tolk svaret.
(c) Beskriv alle talltripler (R_1,R_2,R_3) av mulige avkastninger i de tre scenariene. Finnes det noen porteføljer slik at $R_1, R_2, R_3 > 0$ (garantert gevinst i alle scenarier)?

Hint: Vi skriver x,y,z for antall aksjer vi kjøper av hvert av verdipapirene. Da blir budsjettbetingelsen $100x + 25y + 45z = 100.000$. Vi kan sette opp en lineær likning for avkastningen i hvert av scenariene. For eksempel blir likningen for Scenario 1 gitt ved $(120 - 100)x + (35 - 25)y + (50 - 45)z = R_1$.