Øvingsoppgaver	MET 1180 Matematikk for siviløkonomer
Eksamenssett I	Lav vanskelighetsgrad

Eksamenssett I er det første av tre sett med øvingsoppgaver for eksamen. Oppgavene på alle settene vil ha vanskelighetsgrad innenfor det som kan forventes på avsluttende eksamen i kurset. Eksamenssett I (dette settet) er det letteste av de tre settene.

Tillatte hjelpmidler er BI-godkjent kalkulator og vedlagt formelark. Eksamenstid er 5 timer. Maksimal score er 108p. Karakterskala er A: 97p. B: 83p. C: 62p. D: 49p. E: 43p. Avsluttende eksamen vil ha 15 punkter (dette settet har 18). Det er flere punkter i dette settet siden det har lav vanskelighetsgrad.

Alle svar skal begrunnes. Det blir lagt vekt på at framgangsmåte og resultat presenteres klart, presist og kortfattet når besvarelsen evalueres.

Oppgave 1.

Vi betrakter funksjonen

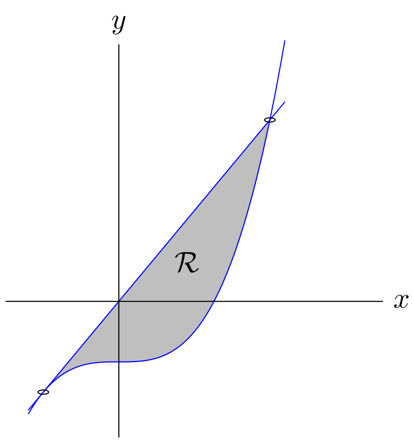
$$f(x) = \frac{\ln x}{x^3}, \quad x > 0$$

(a) **(6p)** Bestem når f er voksende og når f er avtagende.
(b) **(6p)** Finn eventuelle maksimums og minimumsverdier for f.
(c) **(6p)** Finn alle vendepunkter for f. Bestem når f er konveks og når f er konkav.
(d) **(6p)** Bestem grenseverdien til $f(x)$ når $x \to 0^+$ og når $x \to \infty$. Skisser grafen til f.

Oppgave 2.

Regn ut disse integralene:

(a) **(6p)** $\int (x+1)^3 \, \mathrm{d}x$
(b) **(6p)** $\int x \ln x \, \mathrm{d}x$
(c) **(6p)** $\int_1^5 \sqrt{2x-1} \, \mathrm{d}x$



Figuren ovenfor viser området $\mathcal{R}$ begrenset av $y = 3x$ og $y = x^3 - 2$.

(d) **(6p)** Finn et bestemt integral som er lik arealet til området $\mathcal{R}$, og regn ut dette integralet.

Oppgave 3.

Vi betrakter det lineære systemet

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & - & 4z & = & 2 \\ 3x & - & y & + & az & = & 4 \\ 4x & + & 2y & - & z & = & a \end{array}$$

der a er en parameter og x,y,z er variabler.

(a) **(6p)** Finn en matrise A og en vektor $\mathbf{b}$ slik at det lineære systemet kan skrives som $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
(b) **(6p)** Regn ut determinanten til matrisen A.
(c) **(6p)** Løs det lineære systemet når $a = 2$.
(d) **(6p)** Avgjør om systemet er inkonsistent for noen verdier av a.

Oppgave 4.

Vi betrakter funksjonen

$$f(x,y) = 12 - x^2 + xy - y^2 + 6x - 6y$$

(a) **(6p)** Regn ut f'_x og f'_y, og finn eventuelle stasjonære punkter for f.
(b) **(6p)** Klassifisér de stasjonære punktene som lokale maksima, lokale minima eller sadelpunkt.
(c) **(6p)** Vis at $(x,y) = (3,3)$ ligger på nivåkurven $f(x,y) = 3$, og finn likningen for tangenten til nivåkurven i dette punktet.
(d) **(6p)** Har f globale minimumsverdier? Forklar hvorfor/hvorfor ikke.

Oppgave 5.

Vi betrakter funksjonen $f(x) = \ln(x)$.

(a) **(6p)** Finn den lineære approksimasjonen til f omkring $x = 1$.
(b) **(6p)** Bestem Taylor-polynomet til f i $x = 1$ av grad 4, og bruk det til å estimere $\ln(2)$.

Formelsamling

1 Finansmatematikk

Geometriske rekker. En endelig geometrisk rekke har sum

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-k^n}{1-k}$$

og en uendelige geometrisk rekke har sum

$$S = a_1 \cdot \frac{1}{1-k} \quad \text{når } |k| < 1$$

Nåverdier. Nåverdien K_0 til en innbetaling K_n er henholdsvis

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n} \quad \text{og} \quad K_0 = \frac{K_n}{e^{rn}}$$

ved diskret og kontinuerlig diskonteringsrente.

2 Integrasjon

Integrasjonsmetoder.

a) Delvis integrasjon:

$$\int u'v \, \mathrm{d}x = uv - \int uv' \, \mathrm{d}x$$

b) Substitusjon:

$$\int f(u)u' \, \mathrm{d}x = \int f(u) \, \mathrm{d}u$$

c) Delbrøksoppspaltning:

$$\int \frac{px+q}{(x-a)(x-b)} = \int \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \right) \mathrm{d}x$$

Areal. Regionen gitt ved $f(x) \leq y \leq g(x)$ for $a \leq x \leq b$ har areal

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x)) \, \mathrm{d}x$$

3 Lineær algebra

Cramers regel. Et lineært system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ der $|A| \neq 0$ har en entydig løsning gitt ved

$$x_1 = \frac{|A_1(\mathbf{b})|}{|A|} \quad x_2 = \frac{|A_2(\mathbf{b})|}{|A|} \quad \dots \quad x_n = \frac{|A_n(\mathbf{b})|}{|A|}$$

der $A_i(\mathbf{b})$ er matrisen som framkommer ved å bytte ut kolonne i fra matrisen A med $\mathbf{b}$.

4 Funksjoner i flere variable

Annenderivert-testen. Et stasjonært punkt (x^*, y^*) for funksjonen $f(x,y)$ er et

a) lokalt minimum om $A > 0$ og $AC - B^2 > 0$
b) lokalt maksimum om $A < 0$ og $AC - B^2 > 0$
c) sadelpunkt om $AC - B^2 < 0$

når vi setter $A = f''_{xx}(x^*, y^*)$, $B = f''_{xy}(x^*, y^*)$ og $C = f''_{yy}(x^*, y^*)$.

Nivåkurver. På nivåkurven $f(x,y) = c$ er den deriverte $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ gitt ved

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

Totalderivasjon. Når $z = f(x,y)$, og vi har $x = x(t)$ og $y = y(t)$, så er den totalderiverte

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$