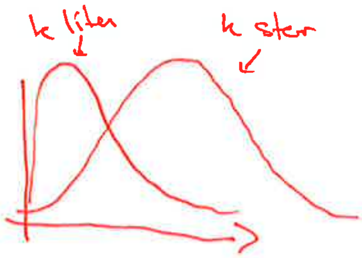
Plan:

1. Introduksjon til hypotesetester
2. Forkastningsområde, p-verdi og styrkefunksjon
3. Hypotesetest for μ når σ^2 er kjent: Z-test
4. Hypotesetest for μ når σ^2 er ukjent: T-test

Pensum:

[L] 6.4 – 6.5



Repetisjon:

a) Flere fordelinger

i) χ^2_k – fordeling: $\chi^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + \dots + Z_k^2$

(kjikvadratfordeling med k frihetsgrader)

der $Z_1, \dots, Z_k$ er std. normalfordelt og uavhengige

Egenskap: $X_1, \dots, X_n$ uavhengige normalfordelte med $E(X_i) = \mu$ og $Var(X_i) = \sigma^2$ for alle i

$$\Downarrow$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2$$

$$Y = \frac{(n-1) S^2}{\sigma^2} \quad \chi^2_{n-1}\text{-fordelt}$$

ii) T-fordeling:

(t-fordeling med $n-1$ frihetsgrader)

$X_1, \dots, X_n$ uavhengige, normalfordelte $N(\mu, \sigma)$

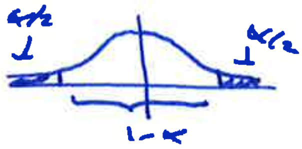
$$\Downarrow$$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \quad t\text{-fordelt med } n-1 \text{ frihetsgrader}$$

Eivind Eriksen, Kontor B4-032, eivind.eriksen@bi.no
http://www.dr-eriksen.no/teaching/MET1190/
Handelshøyskolen BI
Økonomi og Ledelse

b) Konfidensintervall:

Signifikansnivå $\alpha \rightarrow (1-\alpha)\cdot 100\%$ konfidensintervall



i) **Z-intervall** = konfidensintervall for μ når σ er kjent:

$$\bar{X} \pm z_{\alpha/2}\cdot \sigma/\sqrt{n}$$

$A = \bar{X} - z_{\alpha/2}\cdot \sigma/\sqrt{n}$

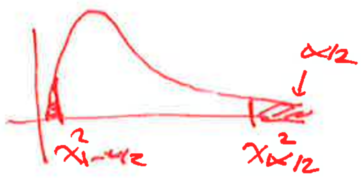
$B = \bar{X} + z_{\alpha/2}\cdot \sigma/\sqrt{n}$

ii) **T-intervall:** konfidensintervall for μ når σ er ukjent:

$$\bar{X} + t_{\alpha/2}\cdot s/\sqrt{n}$$

kritisk t-verdi med n-1 frihetsgrader

iii) **Konfidensintervall for σ^2**



$$\left[\frac{s^2\cdot(n-1)}{\chi^2_{\alpha/2}}, \frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{1-\alpha/2}}\right]$$

kritiske χ^2-verdier med n-1 frihetsgrader (må bruke tabell)

iv) **Konfidensintervall for p:**

$\hat{p} = \frac{X}{n}$

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

når n er stor nok

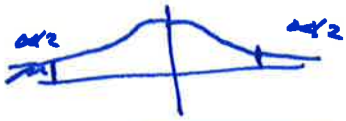
$(n\cdot\hat{p}(1-\hat{p}) \geq 5)$

Eivind Eriksen, Kontor B4-032, eivind.eriksen@bi.no
http://www.dr-eriksen.no/teaching/MET1190/

Oppgavesett 11, Oppg. 1c:

Finn B slik at $P(\mu > B) = 0.01 \iff P(\mu \leq B) = 0.99$

Vanlig: $[A, B]$ slik at $P(A \leq \mu \leq B) = 1 - \alpha$



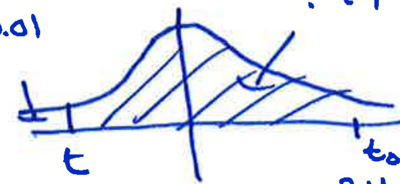
$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$ t-fordelt med $n-1$ frihetsgrader

$$P(\mu \leq B) = 0.99$$

$$P(\mu - \bar{X} \leq B - \bar{X}) = 0.99$$

$$P(\bar{X} - \mu \geq \bar{X} - B) = 0.99$$

$$P\Big(\underbrace{\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}}_{= T} \geq \underbrace{\frac{\bar{X} - B}{S/\sqrt{n}}}_{t}\Big) = 0.99$$



$t = t^{24}_{0.99} = -2.4926$

$t^{24}_{0.01}$

$\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{df}, t \rightleftarrows p}$ 0.01 $\boxed{=}$

$$\frac{\bar{X} - B}{S/\sqrt{n}} = -2.49..$$

$$\bar{X} - B = \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot (-2.49)$$

$$B = \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}(-2.49)$$

$$= \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot 2.49 = \underline{\underline{103.80}}$$

Alternativ:

$$\bar{X} \pm t_{\alpha/2} \cdot S/\sqrt{n}$$

$$B = \bar{X} + t_{0.01} \cdot S/\sqrt{n}$$

$$= \underline{\underline{103.80}}$$

① Hypotesetesting:

Det er viktig at stegene gjennomføres i denne rekkefølgen; spesielt at Ⓔ utføres til slutt.

- Ⓐ Bestem modell og hypotese
- Ⓑ Velg testobservator og finner på forkastnings-området
- Ⓒ Velg ~~test~~ signifikansnivå α = akseptert sannsynlighet for Type I feil.
- Ⓓ Finn kritisk verdi = grenseverdi for forkastningsområde.
- Ⓔ Samle inn data, regn ut testobservator og konkluder.

Eks: ORCLA produserer en pose med tørrvarer som skal veie 500g. Vi mistenker at posen systematisk inneholder mindre enn 500g.

Ⓐ **Modell:** Anta at vekten til en tilfeldig valgt pose av denne typen er normalfordelt $N(\mu, \sigma)$, med forventningsverdi μ og varians σ^2.

Hypoteser:

H_0 : ~~$\mu = 500$~~ $\mu \geq 500$ nullhypotesen

$\boxed{H_1 : \mu < 500}$ alternativ hypotese ← det vi ønsker å "bevise".

Konklusjon: Beslutning

- Vi beholder H_0
- Vi forkaster H_0

H_0: $\mu \geq 500 = \mu_0$

H_1: $\mu < 500 = \mu_0$

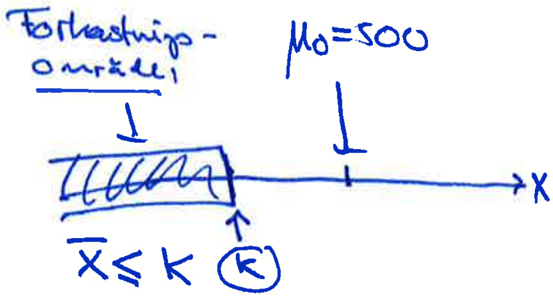
Z-test: σ kjent
T-test: σ ukjent

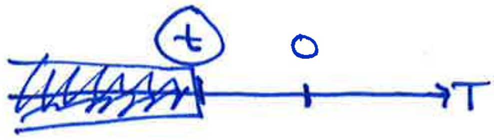
(B) Testobservator:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \quad \text{(estimator)}$$

eller

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \quad \text{(testobservator)}$$





$T \leq t$

(C) Signifikansnivå α: $\alpha = 0.05$

	H_0 sann	H_1 sann
Beholde H_0	√	Type II feil
Forkaste H_0	Type I feil	√

Type I feil:
Forkaster H_0 selv om H_0 er sann.

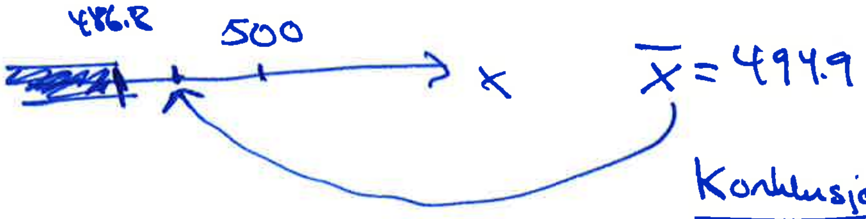
α = sannsynlighet for type I feil.

Type II feil:
Beholder H_0 selv om H_1 er sann.

Alternativ: Forkastningsområde $\bar{X} \leq k$

Finn k: $t = -1.833 \Rightarrow k = 500 - 1.833 \cdot s/\sqrt{n}$
$= \underline{\underline{486,8}}$

Forkastningsregel: $\bar{X} \leq 486,8 \Rightarrow$ Forkaster H_0

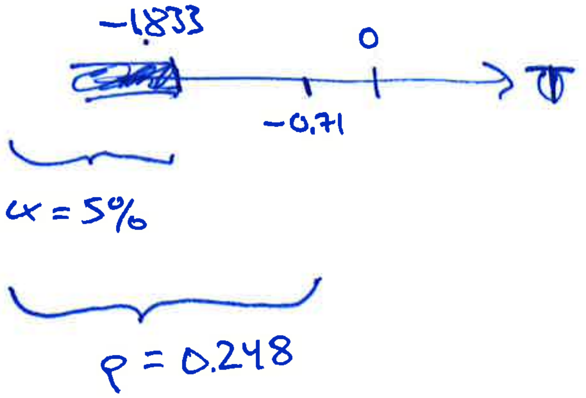


Konklusjon: Vi beholder H_0.

p-verdi: Sannsynlighet for å observere testobservator minst like ekstrem som observert verdi

$p = P(\bar{X} \leq 494.9) = P(T \leq -0.71)$

$\boxed{9}$ $\boxed{df, t \leq 1}$ $\boxed{-0.71}$ $\boxed{=}$ $= \underline{\underline{0.248}}$



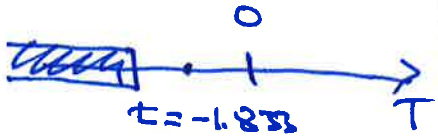
$\boxed{p < \alpha : \text{ Forkast } H_0}$

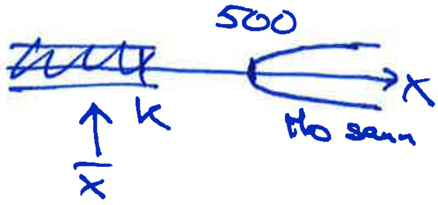
$p > \alpha :$ Beholde H_0

Tre alternativer i T-test:

– T – $\bar{X}$ – p-verdi

D) Finn kritisk verdi t = grenseverdi for forkastningsområdet





Anta Ho sann: $\mu \geq 500$

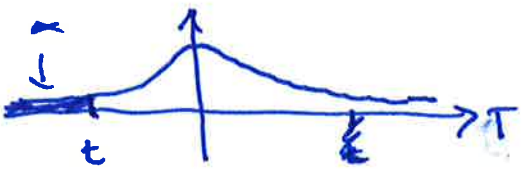
$\mu = \mu_0$

$$p(\bar{X} \leq k \mid \mu = 500)$$

$$= \underbrace{p\left(T \leq \frac{k-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right)}_{t} = \alpha$$

$$T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$$

t-fordelt med n-1 frihetsgrader



$$t = t^{n-1}_{1-\alpha}$$

n-1 frihetsgrader = 9 frih.gr.

Eks: $n = 10$

$$\boxed{t = -1.833}$$

$$T = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

$$\bar{X} - \mu_0 = T \cdot S/\sqrt{n}$$

$$\bar{X} = \mu_0 + t \cdot S/\sqrt{n}$$

$$k = 500 - 1.833 \cdot S/\sqrt{10}$$

Forkastningsregel: $\boxed{T \leq -1.833 \Rightarrow \text{Forkast Ho}}$

E) Hent inn data fra tilfeldig valgt stikkprøve, regn ut testobservatoren ($\bar{X}$ eller T), og konkluder

Observasjoner: 469 518 493 508 524
498 506 447 493 493

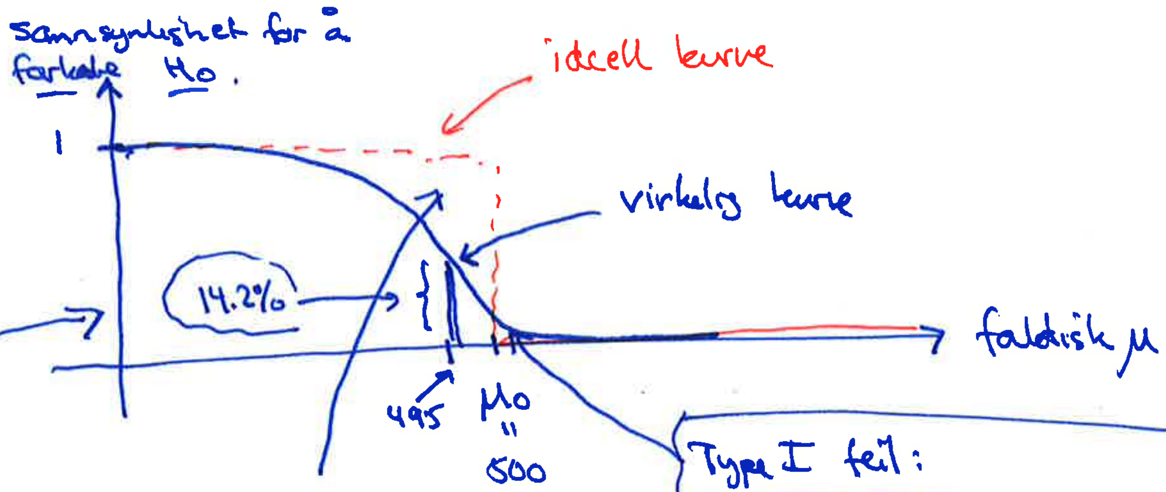
$\bar{X} = 494.9$

$S = 22,76$

$$T = \frac{\bar{X}-500}{S/\sqrt{n}} = -0.71$$

Behold Ho

Styrkefunksjon: $\{ H_1 : \mu < 500 \}$



Type II feil:

H_0 ikke sann $(\mu < 500)$ men sannsynlighet for å forkaste H_0 er < 1

Type I feil:

H_0 sann $(\mu \geq 500)$ men sannsynlighet for å forkaste H_0 er > 0

Styrkefunksjon: γ (gamma)

$\gamma(\mu) :=$ sannsynlighet for å forkaste H_0 gitt at virkelig verdi er μ

Eks:

$$\gamma(495) = P(\underbrace{\bar{X} \leq 486{,}8}_{\text{forkastnings-område}} \mid \mu = 495)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \leq \frac{486.8 - 495}{S/\sqrt{n}}\right)$$

$$= P(T \leq -1{,}139) = \underline{\underline{0{,}142}}$$

Burde ideelt sett vært lik 1 ($\mu = 495$ er mindre enn 500)

På kalkulator:

$9 \; \boxed{df, t \rightleftarrows p} \; -1.139$

$\boxed{=} \to 0.142$

Eivind Eriksen, Kontor B4-032, eivind.eriksen@bi.no
http://www.dr-eriksen.no/teaching/MET1190/