Plan:

1. Introduksjon til sannsynlighetsteori
2. Mengdelære
3. Egenskaper for sannsynlighetsmål
4. Kombinatorikk

Kap. 3 – sannsynlighets-teori

Repetisjon:

- populasjon / utvalg
- sumnotasjon

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} c = n \cdot c$$

- data-analyse (data fra et utvalg)

i	x_i	y_i
1	x_1	y_1
2	x_2	y_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	x_n	y_n

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}\cdot(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \qquad S_x = \sqrt{S_x^2}$$

(Varians) (std. avvik)

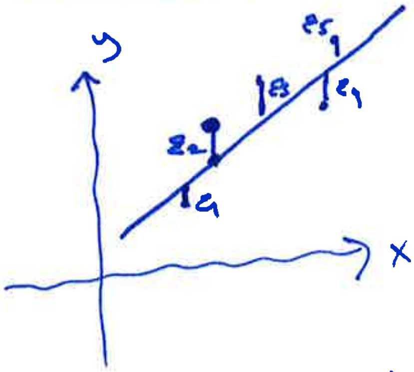
$$S_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\cdot(y_i - \bar{y})$$

(Kovarians)

$$r_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y}$$

Eivind Eriksen, Kontor B4-032, eivind.eriksen@bi.no
http://www.dr-eriksen.no/teaching/MET1190/

Minste kvadraters metode og regresjonslinjer



Spredningsplott

← regresjonslinjen = linjen som passer "best mulig" med dataene

$$y = \alpha + \beta x$$

Minste kvadraters metode:

Velg α, β slik at $\underbrace{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_N^2}_{\text{feilfunksjon}}$ er minst mulig.

Løsning:

$$\beta = r_{xy} \cdot \frac{s_y}{s_x}$$

$$\alpha = \bar{y} - \beta \cdot \bar{x}$$

Fakta:

$$\begin{cases} -1 \leq r_{xy} \leq 1 \\ r_{xy} = 1 \text{ eller } r_{xy} = -1 \iff \text{datapunktene ligger på en rett linje} \end{cases}$$

$r_{xy} > 0$: $\beta > 0$ (positivt stign.tall) /

$r_{xy} < 0$: $\beta < 0$ (neg. —"—) \

Opgg. 8b:

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2 \right)$$

Bevis:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2 \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} 2x_i\bar{x} + \sum_{i=1}^{n} \bar{x}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^{n} x_i + n \cdot \bar{x}^2$$

$$= \sum x_i^2 - 2\bar{x} \cdot n\bar{x} + n\bar{x}^2 = \underline{\underline{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$n\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

① Introduksjon til sannsynlighetsteori

Stokastisk forsøk: forsøk eller eksperiment der man ikke forsøker å forutse utfallet, men kjenner mulige utfall og et sannsynlighetsmål

Stokastisk = tilfeldig

Eks: Stokastisk forsøk: Vi kaster én terning
Mulige utfall: 1, 2, 3, 4, 5, 6
Sannsynligheter: $p(1) = 1/6$ ← sannsynlighet for å slå 1
$p(2) = 1/6$
⋮
$p(6) = 1/6$

Begrep:

Utfallsrom S : mengden av mulige utfall — $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Utfall: ω — et av utfallene i utfallsrommet — $\omega = 2$

Hendelse: A — delmengde av utfallsrommet — $A = \{1, 3, 5\}$ "vi slår et oddetall"

Sannsynlighet: $p(A)$ — sannsynligheten for at A inntreffer — $p(A) = 3/6 = 1/2$ sannsynlighet for å slå oddetall

$p(2) = 1/6$

"Minstekrav" (aksiom):

i) $p(A) \geq 0$ for alle hendelser A

ii) $p(S) = 1$

iii) $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ når A og B ikke har noen felles utfall (disjunkte)

↑ Sannsynligheten for at A eller B inntreffer

(se mer komplett beskrivelse nedenfor)

Vi spesifiserer et stokastisk forsøk ved følgende data:

- utfallsrommet S (en mengde)
- et sannsynlighetsmål på S, dvs en funksjon p som tar verdier i delmengder $A \subseteq S$ og tall-verdier

↑ hendelser

$$\underset{\text{hendelse}}{A \subseteq S} \longrightarrow p(A)$$

slik at

aksiomer (minstekrav) for sannsynlighetsmål

i) $p(A) \geq 0$ for alle hendelser $A \subseteq S$

ii) $p(S) = 1$

iii) $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ når $A \cap B = \emptyset$,

og mer generelt,

$p(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = p(A_1) + p(A_2) + \ldots$

når $A_i \cap A_j = \emptyset$ for alle i, j (parvis disjunkte mengder)

Eks:

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$p(1) = p(2) = p(3) = p(5) = p(6) = 1/5$

$p(4) = 0$

← tilfredsstiller kravene til et sannsynlighetsmål: ✓

② Mengdelære

A, B delmengder av S
$(A, B \subseteq S)$

Union: $A \cup B$ = alle element i A eller i B (eller begge)

Snitt: $A \cap B$ = alle elementer i A og B

Komplement: A^c = alle elementer (i S) som ikke er med i A

Tomme mengde: $\emptyset$ mengden uten noen elementer

Disjunkte mengder: $A \cap B = \emptyset$
A og B disjunkte hvis

Element: $x \in A$ betyr at x er et element i A

Delmengde: $A \subseteq S$ betyr at A er en delmengde av S

Eks:

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$

$A = \{1,2,3\}$

$B = \{1,3,5\}$

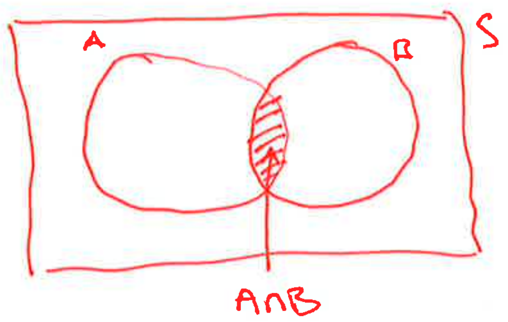
$A \cup B = \{1,2,3,5\}$

$A \cap B = \{1,3\}$

$A^c = \{4,5,6\}$

$A \cap A^c = \emptyset$

Venn-diagram:



Uniform sannsynlighet:

Et stokastisk forsøk som har endelig utfallsrom, og alle utfall er like sannsynlige, kalles uniformt. (uniform sannsynlighet)

Eks: Vi kaster en mynt.

$S = \{M, K\}$ $\quad p(M) = p(K) = 1/2$ ← uniform sannsynlighet

Eks: $S = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ $\quad n$ = antall utfall

$p(\omega_1) = p(\omega_2) = \dots = p(\omega_n) = 1/n$

③ Egenskaper ved stokastiske forsøk

a) $p(A^c) = 1 - p(A)$

b) $p(\emptyset) = 0$

c) $p(A) \leq p(B)$ når $A \subseteq B$

d) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Bevis: A, A^c disjunkte mengder

$A \cap A^c = \emptyset$

$p(A \cup A^c) = p(A) + p(A^c)$

$\quad \parallel$

$p(S)$

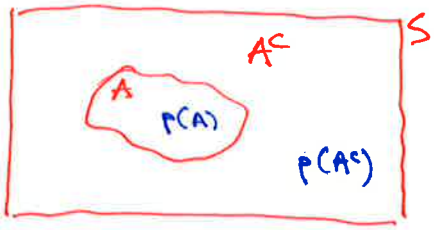
$\quad \parallel$

$\quad 1$

$\Rightarrow$ $p(A^c) = 1 - p(A)$

Forklaring av egenskap a) - d) vha Venn-diagram

a) $p(A^c) = 1 - p(A)$



$p(S) = 1$

$A \cap A^c = \emptyset \Rightarrow p(A) + p(A^c) = p(A \cup A^c)$
$= p(S) = 1$

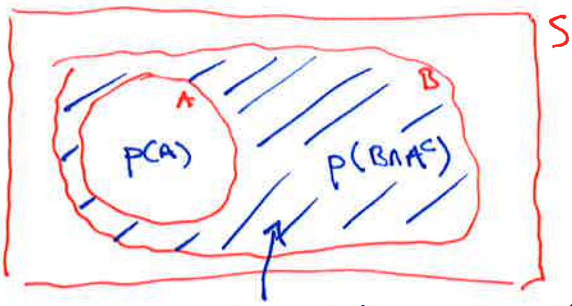
$\underline{p(A^c) = 1 - p(A)}$

b) $p(\emptyset) = 0$

$A = S \Rightarrow A^c = \emptyset$

$p(A^c) = 1 - p(A)$
$p(\emptyset) = 1 - p(S) = 1 - 1 = 0$

c) $p(A) \leq p(B)$ når $A \subseteq B$



Skravert område: $B \cap A^c$

$B \cap A^c$ = alle element i B som ikke er i A

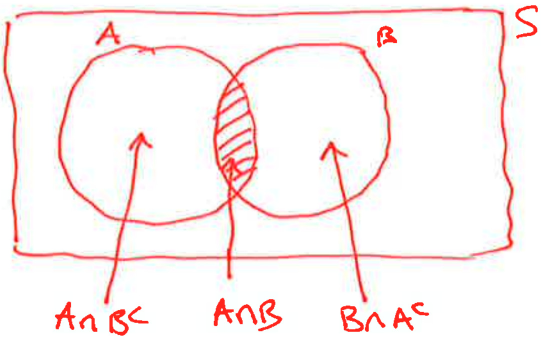
$B = A \cup (B \cap A^c)$ disjunkt union

$\Downarrow$

$p(B) = p(A) + p(B \cap A^c) \geq p(A)$

siden $p(B \cap A^c) \geq 0$

d) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$



$A \cup B = (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (B \cap A^c)$ disjunkte mengder

$p(A \cup B) = \underbrace{p(A \cap B^c) + p(A \cap B)}_{} + p(B \cap A^c)$

$= p(A) + p(B \cap A^c)$

$= p(A) + \underbrace{p(B \cap A^c) + p(A \cap B)}_{p(B)} - p(A \cap B)$

$= p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Eks: Vi kaster en mynt til vi får K første gang.

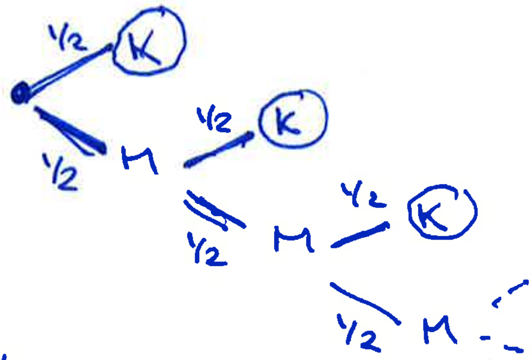
$$S = \{K, MK, MMK, MMMK, \dots\}$$

$p(K) = 1/2$

$p(MK) = 1/4$

$p(MMK) = 1/8$

$\vdots$



$$p(S) = p(K) + p(MK) + \dots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - 1/2}$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 1/2} = \underline{\underline{1}}$$

4 Kombinatorikk

Eks: Vi kaster tre terninger

$$S = \{(1,1,1), (1,1,2), \dots, (6,6,6)\} \leftarrow$$ alle utfall er like sannsynlige

$$p(1,1,2) = \frac{1}{n} = \frac{1}{216}$$

n = antall utfall $= 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$

Multiplikasjonsprinsippet:

n_1 utfall i første forsøk
n_2 " andre "
n_3 " i tredje "

Hvis forsøkene er uavhengige, så er antall utfall

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$$

(Kan også utvides til mer enn tre forsøk)

A = summen av terningene er 7

$= \{(1,1,5), (1,2,4), \ldots\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_k\}$

$$P(A) = p(\omega_1) + p(\omega_2) + \ldots + p(\omega_k)$$
$$= p(1,1,5) + p(1,2,4) + \ldots$$
$$= \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{k} = \frac{k}{n} = \frac{\text{"antall gunstige"}}{\text{"antall mulige"}}$$

Generell formel:

Ved uniform sannsynlighet har vi

$$p(A) = \frac{\text{antall utfall i } A}{\text{antall utfall i } S} = \frac{\text{"antall gunstige"}}{\text{"antall mulige"}}$$

Permutasjoner: Antall rekkefølger på n objekter

$$= n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

(n fakultet)

1 2 3
1 3 2
2 1 3
2 3 1
3 1 2
3 2 1

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

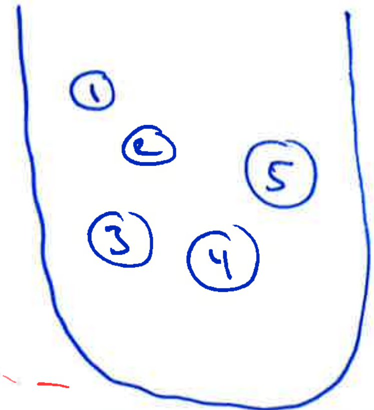
Kalk: $\boxed{n!}$

$3 \ \boxed{n!} \to 6$

Husk: Denne formelen kan brukes ved uniform sannsynlighet, dvs alle utfall like sannsynlige.

Urnemodell:

En urne som inneholder n kuler. Vi trekker r kuler.



	ordnet	uordnet
med tilbakelegging	i)	iv)
uten tilbakelegging	ii)	iii).

Urnemodell kan også brukes når vi ikke fysisk trekker kuler fra en urne:

Eks: Vi kaster to terninger

=

→ trekker $r=2$ av $n=6$ kuler

(med tilbakelegging)

Eks: lottorekke $r=7$ $n=34$

uordnet, uten tilbakelegging

i) Ordnet, med tilbakelegging: vi trekker r kuler, totalt n kuler

$$\underbrace{n\cdot n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}_{r \text{ ganger}} = n^r$$

Eks: tippekupong: $\underline{3^{12}} = 531.441$

ii) Ordnet, uten tilbakelegging: vi trekker r kuler, totalt n kuler

$$\underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r} = \boxed{{}_nP_r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Kalk: $n=34$, $r=7$ (Eks)

34 $\boxed{nPr}$ 7 $\boxed{=}$

↓

27.113.264.640

iii) Uordnet, uten tilbakelegging: vi trekker r kuler, totalt n kuler

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-r+1)}{r\cdot(r-1)\cdot(r-2)\cdots 1} = \binom{n}{r} = \boxed{{}_nC_r}$$

binomial koeffisient

kalk.

Eks: $n = 3$, $r = 2$

1 2
1 3
2 1
2 3
3 1
3 2

$$\frac{n\cdot(n-1) = 3\cdot 2 = 6}{r\cdot(r-1) = 2\cdot 1 = 2} = 3$$

$$\binom{3}{2} = \underline{\underline{3}}$$

Eks: Antall lotterekker: $r = 7$ kuler trekkes, $n = 34$ " totalt

uordnet, uten tilbakelegging

$$\binom{n}{r} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-r+1)}{r\cdot(r-1)\cdots 1}\cdot\frac{(n-r)\cdots 1}{(n-r)\cdots 1} = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$$

"n velg r"

$$\underbrace{\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}}_{\text{generell formel for binomial-koeff.}} = \frac{34!}{7!\cdot 27!}$$

eller 34 $\boxed{nCr}$ 7 $\boxed{=}$

5.379.616

Om binomialkoeffisienter:

* **Newton's binomialformel:**

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + b^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

Eks: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\binom{2}{0}=1$ $\binom{2}{1}=2$ $\binom{2}{2}=1$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $\binom{3}{0}=1$ $\binom{3}{1}=3$ $\binom{3}{2}=3$ $\binom{3}{3}=1$

* **Pascal's trekant:**

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

– hvert tall er summen av tallene på skrå ovenfor

– tallene i rad i (når vi starter med 0 øverst) er binomialkoeff. $\binom{i}{*}$

rad 4:

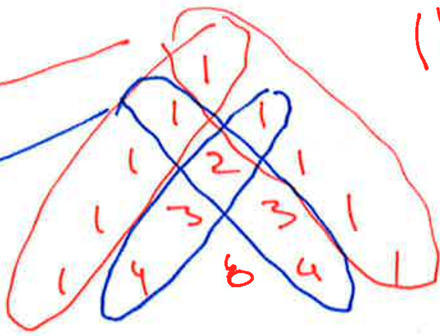
$\binom{4}{0}=1$ $\binom{4}{1}=4$ $\binom{4}{2}=6$ $\binom{4}{3}=4$ $\binom{4}{4}=1$

Husk:

$0! = 1$

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

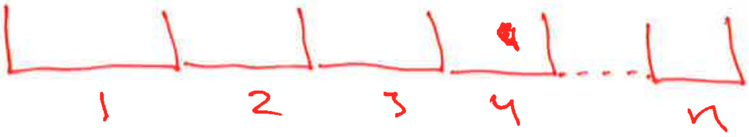
$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$



iv) <u>Uordnet, med tilbakelegging</u>: vi trekker r kuler totalt n kuler

$$\binom{n+r-1}{r}$$

<u>Utledning</u>: Vi tenker at vi lager n kategorier, én for hver av de n kulene vi kan trekke



for hver av de r kulene vi trekker, putter vi den i "riktige beholder".

<u>Eks</u>: $n=3$ $r=5$ Vi trekker 1 3 1 2 3
Da legger vi kulene slik

Vi kan symbolsk skrive dette slik

$$\boxed{0\,0\,|\,0\,|\,0\,0}$$

med 0 = kule $|$ = divisjon mellom kontainere / beholdere

Det blir r kuler $(r=5)$
$n-1$ streker $(n=3 \Rightarrow n-1=2)$

$n+r-1$ symboler ialt $(5+3-1=7)$

Vi kan da starte med $n+r-1$ kuler, og så velge r plasser som vi <u>ikke</u> erstatter med streker, $n-1$ plasser vi erstatter med streker

Antall muligheter:

$$\binom{n+r-1}{n-1} = \binom{n+r-1}{r}$$