Plan:

1. Stokastiske variabler
2. Diskrete stokastiske variabler
3. Forventning og varians
4. Binomisk og geometrisk fordeling

Pensum:

[L] 4.1 – 4.2, 5.1 – 5.2, 5.4

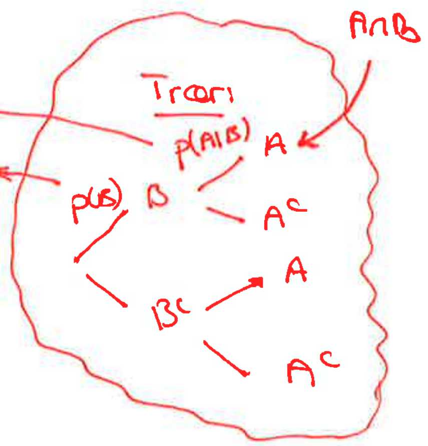
Mer om binomisk og geometrisk fordeling neste gang.

Repetisjon:

a) **Betinget sannsynlighet**

$$p(A|B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)} \iff p(A\cap B) = p(A|B)\cdot p(B)$$

sannsynlighet for A, gitt at B inntreffer



Total sannsynlighet: $p(A) = p(A|B)\cdot p(B) + p(A|B^c)\cdot p(B^c)$

Bayes' teorem:

$$p(B|A) = \frac{p(A|B)\cdot p(B)}{p(A)}$$

b) **Mengdelære:**

de Morgan's lover

$(A\cup B)^c = A^c \cap B^c$

$(A\cap B)^c = A^c \cup B^c$

distributiv lov

$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap B)$

c) **Uavhengighet:**

A og B uavhengige hvis $P(A\cap B) = p(A)\cdot p(B)$

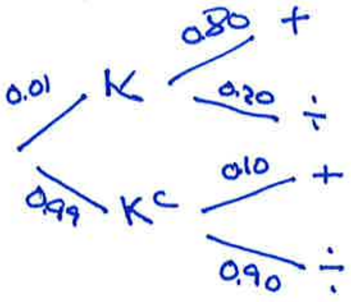
$$\Updownarrow$$

$$p(A|B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)} = p(A)$$

Eivind Eriksen, Kontor B4-032, eivind.eriksen@bi.no
http://www.dr-eriksen.no/teaching/MET1190/

Oppgaver fra Oppgavesett 3:

(1)



K: brystkreft
+: positiv diagnose
$(\div = +^c)$

$$p(K|+) = \frac{p(+|K)\cdot p(K)}{p(+)} = \frac{0.01\cdot 0.80}{0.01\cdot 0.80 + 0.99\cdot 0.10} = \frac{0.008}{0.008+0.099}$$

$$= \frac{8}{107} \simeq \underline{\underline{7.5\%}}$$

de Morgan's law

(7) $p(A^c \cap B^c) = 1 - p((A^c \cap B^c)^c) = 1 - p(A \cup B)$

$= 1 - (p(A) + p(B) - p(A\cap B))$

A og B er uavhengige

$= 1 - p(A) - p(B) + p(A)\cdot p(B)$

$= (1 - p(A))\cdot(1 - p(B)) = p(A^c)\cdot p(B^c)$

dvs at $\underline{A^c \text{ og } B^c \text{ er uavhengige}}$

① Stokastiske variabler

Stokastisk forsøk:

$S = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ utfallsrommet

$A \subseteq S$ (hendelse) $\rightsquigarrow$ $p(A)$ (et tall) – sannsynlighet for at A skjer

(tilfeldig)
En stokastisk variabel
X er en variabel som tar verdier avhengig av utfallet i et stokastisk forsøk

ω_i (utfall) $\rightsquigarrow$ $X(\omega_i)$ (et tall)

Eks: Vi kaster en terning

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$p(1) = p(2) = \ldots = p(6) = 1/6$

X = 'antall øyne på terningen'

$p(X=3) = \underline{1/6}$

x	$p(x)$
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

forventningsverdi (expectation)

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1+2+3+4+5+6}{6}$$

$$= \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = \underline{\underline{3.5}}$$

$\boxed{\text{forventning = gjennomsnittsverdi når vi gjentar forsøket mange ganger}}$

Stokastisk variabel : X

En verdi av X : x

(en realisering)

Alle mulige verdier til den stokastiske variabelen:

$$X(S) = \{X(\omega) : \omega \in S\}$$

<u>Eks:</u> Vi kaster to terninger

$X =$ sum antall øyne

$(1,1)$: $X(1,1) = 2$

$(1,2)$: $X(1,2) = 3$

$(2,1)$: $X(2,1) = 3$

⋮

utfall i utfallsrommet $S = \{(1,1), \ldots, (6,6)\}$

alle mulige X-verdier $X(S) = \{2,3,4,\ldots,12\}$

x	$p(X=x)$	$p(X\leq x)$
2	1/36	1/36
3	2/36	3/36
4	3/36	6/36
5	4/36	10/36
6	5/36	15/36
7	6/36	21/36
8	5/36	26/36
9	4/36	30/36
10	3/36	33/36
11	2/36	35/36
12	1/36	1

Sannsynlighetsfordelingen til X: $p(x) = f(x)$

(cdf) Kummulative fordelingsfunksjonen til X: $F(x)$

<u>$X=3$</u> : $\{(1,2),(2,1)\} = A$ hendelse

Oppsummering: Stokastiske variabler

X tar tall-verdier som avhenger av utfallet av et stokastisk forsøk

$X(S)$: alle mulige verdier av den stokastiske variabelen X

For hver verdi x for X: $p(x) = p(X=x)$ sannsynligheten for å få verdien x

$F(x) = p(X \leq x)$ sannsynligheten for å maksimalt få x (kumulativ)

$p(x)$: fordelingsfunksjonen til X

$F(x)$: kummulativ fordelingsfunksjon (cdf) til X

$P(K) = 1/2$
$P(M) = 1/2$

Eks: Vi kaster en fair mynt til vi får K første gang.

X = antall kast

$X(S) = \{1, 2, 3, \dots\}$ ← uendelig tellbar mengde

x	$p(x)$	$F(x)$
1	1/2	1/2
2	1/4	3/4
3	1/8	7/8
4	1/16	⋮
5	1/32	
6	1/64	
⋮		

Eks:
$p(X > 2) = 1 - p(X \le 2)$
$= 1 - F(2) = \underline{\underline{1/4}}$

(2) Diskrete stokastiske variabler

X er en diskret stokastisk variabel hvis $X(S)$ er endelig eller tellbar uendelig.

X er en kontinuerlig stokastisk variabel hvis $X(S)$ inneholder et intervall

Eks: $X(S) = [0, 10]$ X kontinuerlig stokastisk variabel

Eks: $X(S) = \{0,1,2,3,\dots,10\}$ diskret

$p(2 \le X \le 3) = p(2) + p(3)$

Eks: $X(S) = [0,10]$ kontinuerlig

$p(2 \le X \le 3) = \int_2^3 f(x)\,dx$

kan ikke summere sannsynligheter her, må bruke integrasjon

3 Forventningsverdi og varians for diskrete stokastiske variable

X: diskret stokastisk variabel

$X(S)$ = alle mulige X-verdier $= \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$

$p(x) = p(X = x)$ fordelingsfunksjon

$F(x) = p(X \le x)$ cdf

Defn: Forventningsverdien til X er

$$E(X) = \sum_{x \in X(S)} x \cdot p(x) = x_1 \cdot p(x_1) + x_2 \cdot p(x_2) + \dots$$

Skrivemåte: $\mu = E(X)$

Tolkning: Gj.snittlig x-verdi når vi gjentar forsøket mange ganger.

Eks: X = lakse pris (gj. snitt) for 2019.

$E(X)$: forventet laksepris i 2019

Defn: $E(g(X)) = \sum_{x \in X(S)} g(x) \cdot p(x)$ når $g(X)$ er en funksjon av X

Eks: X = antall øyne når vi kaster en terning

x	$p(x)$
1	1/6
2	1/6
3	"
4	"
5	"
6	"

$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6} = \underline{\underline{3.5}}$

$E(X^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{181}{6}$ ....

$= \sum_{x=1}^{6} x^2 \cdot p(x)$

Regneregler for forventning:

i) $E(aX+b) = a \cdot E(X) + b$ når a,b er konstanter

ii) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

Men: $E(X^2) \neq E(X)^2$

Varians:

$\boxed{\text{Var}(X) \text{ skrives også } \sigma^2}$

$$\text{Var}(X) = E[(X-\mu)^2] \qquad \text{der } \mu = E(X)$$

$$= \sum_{x \in X(S)} (x-\mu)^2 \cdot p(x)$$

Eks: X = antall øyne når vi kaster én terning

$$\text{Var}(X) = \sum_{x=1}^{6} (x - 7/2)^2 \cdot \frac{1}{6} = (1-3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (2-3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + (6-3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{215}{12} \dots$$

Std. avvik: $\sigma = \sqrt{\frac{215}{12}} \simeq 4.23$

Regneregler for varians:

i) $\text{Var}(X) \geq 0 \Longrightarrow$ Defn: $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$ std. avvik for X

ii) $\text{Var}(aX+b) = a^2 \cdot \text{Var}(X)$

iii) $\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Eks: Vi skal danne en gruppe som består av 3 personer, som trekkes tilfeldig

X = antall gutter i gruppen

Anta at vi trekker fra en hatt med 50% gutter og 50% jenter.

$X(S) = \{0, 1, 2, 3\}$

x	$p(x)$		
0	$0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.5$	$= 0.5^3$	$= 1/8$
1	$3 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.5$	$= 3 \cdot 0.5^3$	$= 3/8$
2	$3 \cdot \underline{0.5 \cdot 0.5} \cdot 0.5$		$= 3/8$
3	$0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.5$		$= 1/8$
			1

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = 1.5$$

$$Var(X) = (0-1.5)^2 \cdot \frac{1}{8} + (1-1.5)^2 \cdot \frac{3}{8} + (2-1.5)^2 \cdot \frac{3}{8} + (3-1.5)^2 \cdot \frac{1}{8}$$

$$= E(X^2) - E(X)^2$$

$$= \left(0^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8}\right) - 1.5^2$$

$$= \frac{3+12+9}{8} - 1.5^2 = 3 - 2.25 = 0.75$$

$$\mu = E(X) = 1.5$$

$$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{0.75} \simeq 0.86$$

mu = forventning
sigma = std. avvik

(4) Binomisk fordeling

Binomisk forsøksrekke:

Vi gjentar et forsøk n ganger med to mulige utfall $\{S, F\}$, med $p(S) = p$ og $p(F) = 1-p$.

Vi antar at gjentagelsene er uavhengige av hverandre.

Binomisk variabel: X = antall S

binomisk fordelt med parametre n og p.

$$X(S) = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$

$$p(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

Formler:

$$E(X) = n \cdot p$$

$$Var(X) = n \cdot p(1-p)$$

for binomiske fordelinger