Plan:

1. Binomisk fordeling
2. Geometrisk og hypergeometrisk fordeling
3. Poisson-fordeling
4. Chebyshevs ulikhet og tolkning av forventning μ og standardavvik σ.

Repetisjon:

Diskret stokastisk variabel X

Verdiene til X er tilfeldige, bestemt av utfallet til et stokastisk forsøk.

Mulige verdier: $X(S) = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ (endelig)

eller

$\{1, 2, 3, \ldots\}$ (uendelig tellbar)

typiske eksempler

x	$p(x) = p(X=x)$	$F(x) = p(X \leq x)$
1	$p(1) = p(X=1)$	$F(1) = p(1)$
2	$p(2)$	$F(2) = p(1) + p(2)$
3	$p(3)$	$F(3) = p(1) + p(2) + p(3)$
$\vdots$	$\vdots$	

fordelingsfunksjonen til X: $p(x)$

kummulative fordelingsfn. til X: $F(x)$

Krav:

i) $p(x) \geq 0$ for alle x

ii) $\sum_{x \in X(S)} p(x) = 1$

Forventning og varians (for diskrete stokastiske variabler)

$$E(X) = \sum_{x \in X(S)} x \cdot p(x) = x_1 \cdot p(x_1) + x_2 \cdot p(x_2) + \ldots$$

(forventning)

Tolkning: Gj. snitt av x-verdiene om vi gjentar det stokastiske forsøket mange ganger.

Skrivemåte: $\mu_X = E(X)$ (μ = mu) eller kun $\mu = E(X)$

Regneregler: i) $E(aX+b) = a \cdot E(X) + b$ når a, b er konst.

$$\text{Var}(X) = E[(X-\mu)^2] = \sum_{x \in X(S)} (x-\mu)^2 \cdot p(x) \geq 0$$

(varians)

$$= E(X^2) - \mu^2$$

Skrivemåte: $\sigma^2 = \text{Var}(X)$ varians

$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$ std.-avvik

Regneregler: ii) $\text{Var}(aX+b) = a^2 \, \text{Var}(X)$

Spesialtilfeller:

i) Binomisk fordeling
ii) Geometrisk fordeling
iii) Hypergeometrisk fordeling
iv) Poisson fordeling

Husk:

i) $E(aX+b) = a\,E(X)+b$

ii) $\text{Var}(aX+b) = a^2 \cdot \text{Var}(X)$

iii) $\text{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2$

1) Binomisk fordeling

Vi gjentar et stokastisk forsøk n ganger. I hvert forsøk inntreffer en hendelse S med sannsynlighet $p = p(S)$, og vi skriver $q = p(S^c) = 1-p$. X er antall ganger S inntreffer.

Betingelser:

$p(S) = p$ i hver gjentagelse
gjentagelsene er uavhengige

} Binomisk forsøksrekke

X binomisk fordelt med parametre n, p.

$$X(S) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

$$p(i) = \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot q^{n-i} \qquad i = 0, 1, \dots, 30$$

Eks:

$$p(0) = \binom{n}{0} p^0 q^n = q^n$$

$$p(1) = \binom{n}{1} \cdot p^1 \cdot q^{n-1} = npq^{n-1}$$

$$\vdots$$

$$\boxed{\begin{aligned} E(X) &= np \\ Var(X) &= npq \end{aligned}}$$

Eks:

Vi kaster en terning 30 ganger

X = antall seksere

Binomisk $\begin{cases} n = 30 \\ p = 1/6 \end{cases}$

$$p(0) = (5/6)^{30}$$

$$p(1) = 30 \cdot \tfrac{1}{6} \cdot \left(\tfrac{5}{6}\right)^{29}$$

$$E(X) = 30 \cdot \tfrac{1}{6} = 5$$

$$Var(X) = 30 \cdot \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{5}{6} = \frac{25}{6}$$

$$\sigma = \sqrt{25/6}$$

Oppsummering 4:

7.) R = antall riktige svar

binomisk $n=15$ $p=1/4$ $q=3/4$

a) $X = 3\cdot R + (-1)\cdot(15-R)$

$= 3R - 15 + R = \underline{4R-15}$

b) $E(X) = E(4R-15) = 4\cdot E(R) - 15$

$= \cancel{4}\cdot(15\cdot \cancel{1/4}) - 15 = \underline{\underline{0}}$

$Var(X) = Var(4R-15) = 4^2\cdot Var(R)$

$= \cancel{4^2}\cdot 15\cdot 1/\cancel{4}\cdot 3/\cancel{4} = \underline{45}$

$\sigma_X = \sqrt{45} \simeq \underline{\underline{6.71}}$

c) $p(X \geq 37) = p(4R-15 \geq 37)$

$= p(4R \geq 52) = p(R \geq 13)$

$= p(R=13) + p(R=14) + p(R=15)$

$= \binom{15}{13}\cdot (1/4)^{13}\cdot(3/4)^2 + \binom{15}{14}(1/4)^{14}(3/4)^1 + \binom{15}{15}(1/4)^{15}$

$= \underline{\underline{0.00000092}}$

$p(X<9) = p(4R-15<9) = p(R<6)$

$= p(0) + \ldots + p(5) = \ldots \simeq \underline{\underline{0.85}}$

9.)

X	$P(x)$	$Y = x - 13$
2	$1/2$	-11
$2^2 = 4$	$1/4$	-9
$\vdots$		
$2^{13} = 8192$	$1/8192$	8179

$$2^x = 10.000$$
$$x \cdot \ln(2) = \ln(10.000)$$
$$x = \frac{\ln(10000)}{\ln(2)} = 13, \ldots$$

$$E(Y) = E(X) - 13$$
$$= 13 - 13 = \underline{\underline{0}}$$

$$Var(Y) = Var(X - 13)$$
$$= Var(X)$$
$$= \underline{E(X^2)} - E(X)^2$$
$$= \left(2^{\cancel{2}} \cdot \tfrac{1}{\cancel{2}} + 4^{\cancel{2}} \cdot \tfrac{1}{\cancel{4}} + \ldots\right) - 13^2$$
$$= (2 + 4 + 8 + \ldots + 8192) - 13^2$$
$$= 2 \cdot \frac{2^{13} - 1}{2 - 1} - 13^2$$
$$= 2 \cdot 8191 - 169 = \underline{16.213}$$

$$\sigma_Y = \sqrt{16.213} \simeq \underline{\underline{127}}$$

(2) Geometrisk fordeling

X = antall gjentagelser før s inntreffer i en binomisk forsøksrekke med $p(s) = p$.

$X(S) = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$p(i) = p \cdot q^{i-1} = p \cdot (1-p)^{i-1}$

Eks: $p(5) = \cancel{1/6 \cdot (5/6)^4}$

$p \cdot (1-p)^4 = p \cdot q^4$

$$\boxed{\begin{aligned} E(X) &= 1/p \\ \mathrm{var}(X) &= 1/p^2 - 1/p \end{aligned}}$$

Eks: Vi kaster én terning til vi får seks første gang.

X = antall kast

geometrisk f. w/ $p = 1/6$

$p(5) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5$

$E(X) = \frac{1}{1/6} = 6$

3) Hypergeometrisk:

Populasjon: N
Objekter med en spesiell egenskap: M
Vi trekker n (uten tilbakelegging)

$p = M/N$ andelen som har den spesielle egenskapen

$q = 1 - p$

X = antall blant de vi har trukket som har den spesielle egenskapen

$X(S) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$
eller
$\{0, 1, 2, \dots, M\}$

$$p(i) = \frac{\binom{M}{i} \cdot \binom{N-M}{n-i}}{\binom{N}{n}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} E(X) &= np \\ Var(X) &= npq \cdot \frac{N-n}{N-1} \end{aligned}}$$

Eks:
X = antall ess i en hånd av fem kort

$N = 52$
$M = 4$
$n = 5$

$p = 4/52 = 1/13$
$q = 12/13$

$X(S) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$$p(2) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{3}}{\binom{52}{5}}$$

$$E(X) = 5 \cdot \frac{1}{13} = \underline{\underline{5/13}}$$

4 Poissonfordeling

X = antall forekomster av en hendelse S i et bestemt tidsintervall

Krav:
- forekomster skjer aldri samtidig
- forekomster i disjunkte tidsperioder er uavhengige

forventet antall forekomster : λ (λ = lambda)

$X(S) = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$p(i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$

$p(0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda}$

$p(1) = \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}$

$\vdots$

$$\boxed{\begin{aligned} E(X) &= \lambda \\ Var(X) &= \lambda \end{aligned}}$$

Eks:

X = Antall mål Barcelona scorer i løpet av en kamp.

$\lambda = \frac{60}{22} \simeq \underline{2.7}$

$p(X=0) = e^{-2.7} \simeq \underline{0.065}$

$p(X=1) = 2.7 \cdot e^{-2.7} \simeq \underline{0.18}$

$E(X) = \underline{\underline{2.7}}$

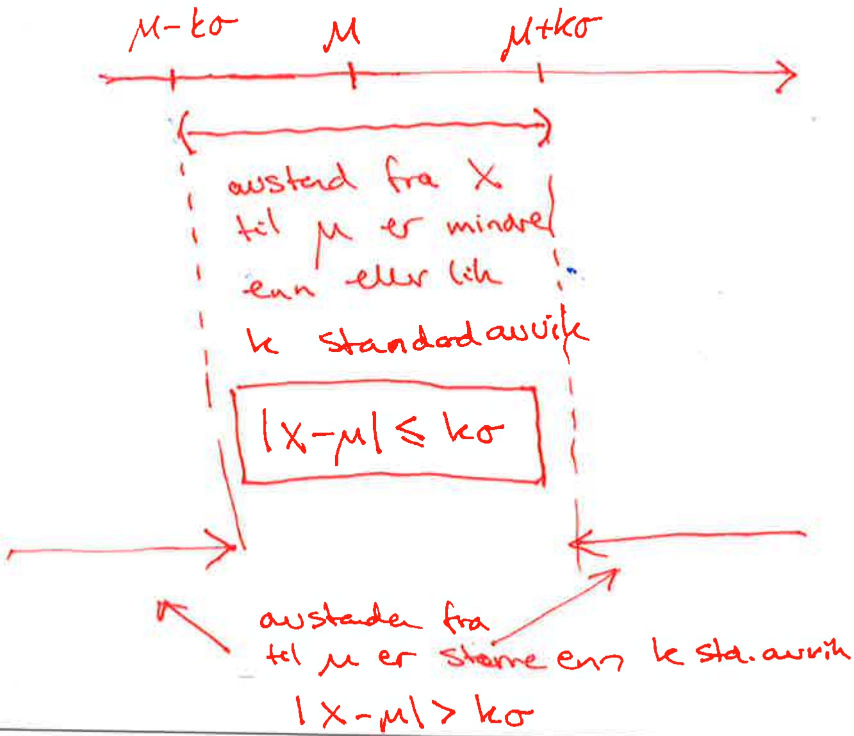
Tilnærming:

Hvis X er binomisk fordelt med parametre n, p og n er stor ($n>10$) og p er liten ($p<0.1$), så er X tilnærmet Poissonfordelt med $\lambda = np$

(4) Chebyshev's ulikhet

For en vilkårlig stokastisk variabel X med forventning $E(X)=\mu$ og varians $Var(X)=\sigma^2$, så har vi:

$$\boxed{P(|X-\mu| > k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}}$$ for alle $k>0$



Tolkning av ulikheten:

Sannsynligheten for at X er mer enn k std.avvik fra μ er $\leq 1/k^2$

$\Downarrow$

sannsynlighet for at X er mindre enn eller lik k std.avvik fra μ er $\geq 1 - 1/k^2$

Eks: $k=2$ sannsynlighet for at X er innenfor $\mu \pm 2\sigma$, dvs $\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma$ er $\geq 1 - 1/2^2 = 1 - 1/4 = 3/4$

Dvs: $\boxed{P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \geq 3/4 \text{ for alle stokastiske variabler } X}$

Eks: Vi kaster mynt/kron helt til vi får kron første gang, og X = antall kast.

X er geometrisk fordelt med $p = 1/2$

$E(X) = 1/p = 2$

$Var(X) = 1/p^2 - 1/p = 4 - 2 = 2$

$\mu = 2$

$\sigma = \sqrt{2} \simeq 1.41$

Innenfor 2 std.avvik:

$\mu + 2\sigma = 2 + 2 \cdot 1.41 = 4.82$

$\mu - 2\sigma = 2 - 2 \cdot 1.41 = -0.82$

$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$

$= P(1 \leq X \leq 4)$

Chebyshev: $P(1 \leq X \leq 4) \geq 3/4$

Chebyshev gir en ulikhet som gjelder alle X. For denne X kan vi regne ut mer nøyaktig:

$P(1 \leq X \leq 4) = p(1) + p(2) + p(3) + p(4)$

$= 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 = 0.9375$ ← Faktisk endel større enn $3/4 = 0.75$