Veiledningsoppgaver

Oppgave 1.
Vi kaster en mynt n ganger. Den stokastiske variabelen X_i defineres som antall kron i i'te kast, slik at

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{hvis i'te kast gir kron} \\ 0, & \text{hvis i'te kast gir mynt} \end{cases}$$

Vi lar $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ og $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.

a) Forklar med ord hva de stokastiske variablene X og $\overline{X}$ representerer.

b) Regn ut $E(X_i)$ og $\text{Var}(X_i)$.
c) Regn ut μ_X og σ_X når $n = 100$.
d) Regn ut $\mu_{\overline{X}}$ og $\sigma_{\overline{X}}$ når $n = 100$.

e) Estimér $p(|\overline{X} - 0.50| > 0.1)$ ved å bruke Chebyshevs ulikhet.

f) Regn ut $p(|\overline{X} - 0.50| > 0.1)$ ved å anta at $\overline{X}$ er normalfordelt.

g) Har du gjort noen antagelser som ikke er eksplisitt nevnt i oppgaveteksten? Skriv i så fall ned antagelsene, og vurder om disse er rimelige. Er antagelsen at $\overline{X}$ er normalfordelt en rimelig antagelse?

Oppgave 2.
Besvar samme spørsmål som i Oppgave 1 når $n = 10.000$.

Oppgave 3.
Når vi runder av et tall til nærmeste heltall, er feilen vi gjør i området $[-0.5{,}0.5]$. Vi runder av n tall, og lar R_i være avrundingsfeilen i det i'te tallet. Hvis vi legger sammen de avrundede tallene, er den totale feilen vi gjør $R = \sum_{i=1}^{n} R_i$. Vi antar at hver feil R_i er uniformt fordelt på $[-0.5{,}0.5]$ og at feilene er uavhengige. Finn forventningsverdi og standardavvik for den totale feilen når

a) $n = 1$
b) $n = 2$
c) $n = 5$
d) $n = 10$
e) $n = 100$

Oppgave 4.
Du skal legge sammen 100 desimaltall. Du runder av hvert av tallene og bruker to desimaler, og legger sammen de avrundede tallene. Vi lar R være den totale feilen du gjør ved å legge sammen de avrundede tallene. Regn ut:

a) $p(|R| > 0.05)$
b) $p(|R| > 0.01)$
c) $p(|R| > 0.005)$
d) $p(|R| > 0.001)$

e) Sannsynligheten for at svaret ikke stemmer overens med den korrekte summen, avrundet til to desimaler.

Oppgave 5.
Vi kaster en terning 360 ganger, og lar X være antall seksere vi får.

a) Hvilken fordeling har X?
b) Regn ut forventning μ_X og standardavvik σ_X.
c) Finn en tilnærming til $p(X \leq 55)$.
d) Finn en tilnærming til $p(X \geq 70)$.

Oppgave 6.
Anta at X og Y er normalfordelte variabler med $E(X) = 2$ og $E(Y) = 5$, $\mathrm{Var}(X) = 9$ og $\mathrm{Var}(Y) = 16$, og $\mathrm{Cov}(X,Y) = 5$.

a) Beskriv fordelingene til $X + Y$ og $2X + 3Y$.

b) Regn ut $p(X + Y \le 5)$.

c) Regn ut $p(0 < 2X + 3Y < 2)$.

Oppgave 7.
Vi kaster en terning gjentatte ganger, og summerer opp antall øyne terningen viser. Finn sannsynligheten for at vi trenger minst 80 kast før summen er større enn 300.

Oppgave 8.
Oppgaver fra læreboken [L]: 5.4, 5.6, 5.22, 5.24, 5.36

Svar på veiledningsoppgaver

Oppgave 1.

a) X totalt antall kast som gir kron og $\overline{X}$ er andel kast som gir kron.

b) $E(X_i) = 1/2$, $\mathrm{Var}(X_i) = 1/4$

c) $\mu_X = 50$, $\sigma_X = 5$

d) $\mu_{\overline{X}} = 0.5$, $\sigma_{\overline{X}} = 0.05$

e) ≤ 0.25.

f) $2 \cdot G(-2) \approx 0.046$

g) At kastene er uavhengige

Oppgave 2.

a) Som før

b) Som før

c) $\mu_X = 5000$, $\sigma_X = 50$

d) $\mu_{\overline{X}} = 0.5$, $\sigma_{\overline{X}} = 0.005$

e) ≤ 0.0025.

f) $2 \cdot G(-20) \approx 2.75 \cdot 10^{-89} \approx 0$

g) Som før

Oppgave 3.

a) $E(R) = 0$, $\sigma_R = \sqrt{1/12} \approx 0.29$

b) $E(R) = 0$, $\sigma_R = \sqrt{2/12} \approx 0.41$

c) $E(R) = 0$, $\sigma_R = \sqrt{5/12} = 0.50$

d) $E(R) = 0$, $\sigma_R = \sqrt{10/12} \approx .91$

e) $E(R) = 0$, $\sigma_R = \sqrt{100/12} \approx 2.89$

Oppgave 4.

a) ≈ 0.083

b) ≈ 0.729

c) ≈ 0.862

d) ≈ 0.973

e) ≈ 0.862

Oppgave 5.

a) X er binomisk fordelt med $n = 360$ og $p = 1/6$

b) $\mu = 360/6 = 60$, $\sigma = \sqrt{50} \approx 7.07$

c) $\approx G((55 - \mu + 0.5)/\sigma) \approx 0.26$

d) $\approx 1 - G((70 - \mu - 0.5)/\sigma) \approx 0.090$

Oppgave 6.

a) $X + Y$ er $N(7, \sqrt{35})$ og $2X + 3Y$ er $N(19, \sqrt{240}$.

b) $G(-2/\sqrt{35}) \approx 0.37$

c) $G(-17/\sqrt{240}) - G((-19/\sqrt{220}) \approx 0.0262$

Oppgave 7.

$$\approx G\left(\frac{300 + 0.5 - 276.5}{15.179}\right) \approx 0.943$$