Plan

1 Introduksjon til sannsynlighetsteori
2 Sannsynlighetsmål og deres egenskaper
3 Kombinatorikk

Lærebok: Løvås, Statistikk

Emner: A Sannsynlighetsregning/teori
B Deskriptiv statistikk
Inferens

Forelesning: Fredag 09-12
Veiledning: —"— 12-14

Kontortid: Tors 09-11

Eksamen 3t, kalkulator + utdelt formelsamling
(BI-godkj.)

① Intro til sannsynlighetsteori

Stokastisk forsøk: stokastisk = tilfeldig

Eks: Vi kaster en terning.

Utfallsrom: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Sannsynlighet:
$P(1) = 1/6$
$P(2) = 1/6$
$P(3) = 1/6$
$P(4) = 1/6$
$P(5) = 1/6$
$P(6) = 1/6$

Hendelse: $A \subseteq S$ delmengde av utfallsrommet

Eks: partall $A = \{2, 4, 6\}$

$P(A) = 3/6 = \underline{\underline{1/2}}$

Sannsynlighetsmål: En funksjon P som er definert for hendelser = delmengder av utfallsrommet

$A \rightsquigarrow P(A)$

slik at:
i) $P(A) \geq 0$ for alle A
ii) $P(S) = 1$
iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ hvis A og B ikke har noen felles utfall

Eks: $P(\{1,2,3\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 3/6$

Defn: Et stokastisk forsøk er prosess / forsøk der utfallsrommet S av alle mulige utfall er gitt, og vi har et sannsynlighetsmål P som oppfyller i) – iii).

Dette er den mest generelle versjonen av (iii)

iii): $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$
når $A_1, A_2, \ldots$ er parvis disjunkte, dvs $A_i \cap A_j = \emptyset$ for $i \neq j$

② Mengder

Element : $a \in A$ { a er element i mengden A

Delmengde : $A \subseteq B$ { A er en delmengde av B

Union: $A \cup B$ A union B
$= \{a : a \in A \text{ eller } a \in B\}$

Snitt: $A \cap B$ A snitt B
$= \{a : a \in A \text{ og } a \in B\}$

Komplement: $\bar{A} = A^c$ alle element som ikke er med i A
(innenfor S) $= \{a : a \notin A\}$

Tom mengde: $\emptyset$

Eks:

$S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$2 \in S$

$\{1,3,5,7\} \subseteq S$

$\{2,6\} \subseteq \{1,2,3,4,5,6\}$

$\{1,3,5\} \cup \{2,3,4,5,6\}$
$= \{1,2,3,4,5,6\}$

$\{1,3,5\} \cap \{2,3,4,5,6\}$
$= \{3,5\}$

$\overline{\{1,3,5\}} = \{2,4,6,7,8,9\}$

$\{2,4\} \cap \{1,3\} = \emptyset$

Eks: En urne inneholder en sort og en hvit kule. Vi trekker en tilfeldig kule.

$$S = \{s, h\} \qquad p(s) = 1/2, \quad p(h) = 1/2$$

$$p(S) = 1$$

$$S = \{s, h\} = \underbrace{\{s\} \cup \{h\}}_{\text{to delmengder uten felles utfall = disjunkte delmengder}} \qquad p(s) + p(h) = 1$$

$$p(s) = p(h) \Downarrow p(s) = p(h) = 1/2$$

Eks: En sort, hvit, blå kule.

$$S = \{s, h, b\} \qquad p(s) = 1/3, \quad p(h) = 1/3, \quad p(b) = 1/3$$

$$p(\{s, h\}) = p(s) + p(h) = 1/3 + 1/3 = 2/3$$

Mer generelt:

Hvis en hendelse A består av et endelig antall utfall $A = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, så er

$$\boxed{p(A) = p(\omega_1) + p(\omega_2) + \cdots + p(\omega_n)}$$

Defn: Et stokastisk forsøk har uniform sannsynlighet dersom det er et endelig antall utfall i S, og alle utfallene er like sannsynlige.

$$S = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\} \quad n \text{ utfall}$$

$$\left.\begin{array}{l} p(w_1) = 1/n \\ p(w_2) = 1/n \\ \vdots \\ p(w_n) = 1/n \end{array}\right\} \qquad p(A) = \frac{\text{antall utfall i } A}{\text{antall utfall i } S} = \frac{\text{"antall gunstige"}}{\text{"antall mulige"}}$$

Eks: Vi trekker et tilfeldig valgt kort fra en kortstokk

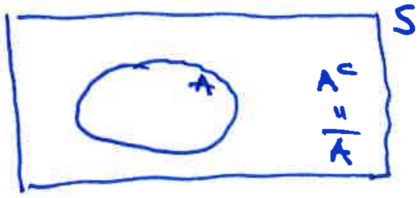
$$p(\text{ess}) = \frac{4}{52} \qquad S = \{S1, S2, \ldots\}$$

$$\text{ess} = \{S1, H1, R1, K1\}$$

Generelle resultater:

Følgende gjelder for alle stokastiske forsøk.

i) $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$



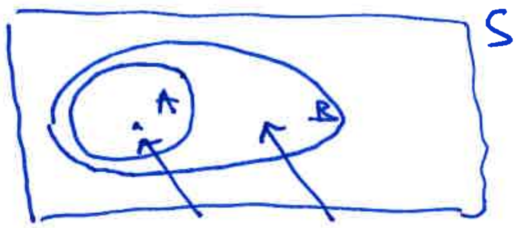
$\underbrace{A \cup A^c}_{\text{disjunkte}} = S$, $\quad A^c = \bar{A}$

$p(A) + p(\bar{A}) = 1$

$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

ii) $p(\emptyset) = 0$

iii) Hvis $A \subseteq B$, så er $p(A) \le p(B)$.



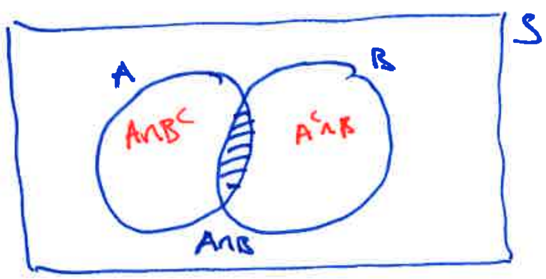
$p(B) = p(A) + \underbrace{p(B \cap \bar{A})}_{\ge 0}$

$p(B) \ge p(A)$

$B = \underbrace{A \cup (B \cap \bar{A})}_{\text{disjunkte}}$

iv) $\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$

formel for sanns.het til en union når A og B ikke er disjunkte



$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$A \cup B = \underbrace{(A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (A^c \cap B)}_{\text{disjunkte}}$

$p(A \cup B) = \underbrace{p(A \cap B^c) + p(A \cap B)}_{p(A)} + p(A^c \cap B)$

$= p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Eks: Vi kaster mynt/kron helt til vi får kron første gang.

$S = \{K, MK, MMK, \ldots\}$ uendelig utfallsrom (diskret)

$p(K) = 1/2$
$p(MK) = 1/4$
$p(MMK) = 1/8$
$\vdots$

$p(S) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - 1/2} = \frac{1}{1} = \underline{1}$

③ Kombinatorikk

Eks: Vi kaster tre terninger, en rød, blå og grønn.

Antall mulige kast: $6 \cdot 6 \cdot 6$
$= 36 \cdot 6 = \underline{\underline{216}}$

Multiplikasjonsprinsippet:

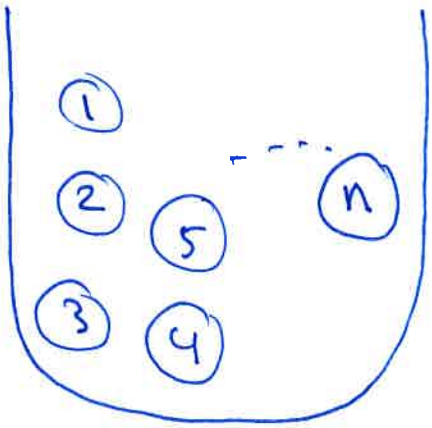
Første forsøk:		n_1	utfall
Andre	" :	n_2	"
Tredje	" :	n_3	"
$\vdots$		$\vdots$	
k-te forsøk :		n_k	"

Samlet antall utfall = $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ hvis forsøkene er uavhengige

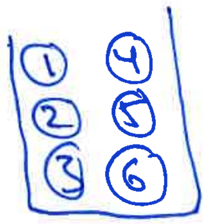
Urnemodell:

En urne inneholder n kuler. Vi trekker r kuler fra urnen.

- ordnet / uordnet
- med / uten tilbakelegging



Eks: Vi kaster tre terninger



$n=6$

Vi trekker $r=3$ kuler fra urnen, ordnet med tilbakelegging

a) Ordnet, med tilbakelegging:

Antall muligheter:

$$\underbrace{n\cdot n\cdot n\cdots n}_{r} = n^r$$

b) Ordnet, uten tilbakelegging:

$$\underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r} \qquad \boxed{nPr}$$

Eks: $52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48$ $n=52$, $r=5$

Kalk: $52\ \boxed{nPr}\ 5\ \boxed{=}$

$17, 18, \ldots, 63$

antall $= 63-17+1$

Antall omrokkeringer av r elementer: $r!$

$$r! = r\cdot(r-1)\cdot(r-2)\cdots\cdots 2\cdot 1$$

$1! = 1$

$2! = 2\cdot 1 = 2$ 12 21

$3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$ 123 132 213 231 312 321

$4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$

$r!$ leses r fakultet

c) Uordnet, uten tilbakelegging:

$$\text{Antall muligheter} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} \qquad \boxed{{}_nC_r}$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots\cdot(n-r+1)}{r!}$$ binomialkoeffisient

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}\,\frac{(n-r)(n-r-1)\cdots\cdot 2\cdot 1}{(n-r)\cdot(n-r-1)\cdots\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Eks: $\binom{6}{2} = \frac{6\cdot 5}{2} = 15 = \frac{6!}{2!\,4!}$

$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!\,2!}$

Pascal's trekant:

1	0
1 1	1
1 2 1	2
1 3 3 1	3
1 4 6 4 1	4

$\binom{2}{0} = 1 \quad \binom{2}{1} = 2 \quad \binom{2}{2} = 1$

$\binom{4}{0} = 1 \quad \binom{4}{1} = 4 \quad \binom{4}{2} = 6 \quad \binom{4}{3} = 4 \quad \binom{4}{4} = 1$

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

(Newton's binomialformel)

d) Uordnet, med tilbakelegging:

Antall muligheter: $\binom{n+r-1}{r}$

Eks: $n = 5$, $r = 2$

$$\binom{5+2-1}{2} = \binom{6}{2} = 15$$

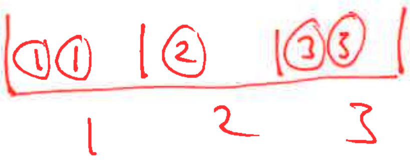
$6 \; \boxed{nCr} \; 2 \; \boxed{=}$

Utledning av formel i d):

Vi lager n kategorier, én for hver av de n kulene:

For hver kule vi trekker, putter vi den i "riktig" beholder

Eks: $n=3$, $r=5$



svarer til å trekke
1 : 2 ganger
2 : 1 gang
3 : 2 ganger

Vi kan skrive: 0 0 | 0 | 0 0

0 = kule | = skille mellom beholdere

Totalt: $n+r-1$ symboler $\begin{cases} n & 0 \\ r-1 & | \end{cases}$

Antall "remser" med n kuler 0 og r-1 skiller | $\longrightarrow$ Ant måter: $\binom{n+r-1}{r}$