

Plan

- 1 Student t-fordeling
- 2 Konfidensintervall for μ når σ er ukjent
- 3 Konfidensintervall for σ^2
- 4 Konfidensintervall for p

Start 11.05Repetisjon:a) Konfidensintervall for μ når σ er kjent

Anta: $X_1, X_2, \dots, X_n$ er uavhengige, identisk fordelte stokastiske variabler med $E(X_i) = \mu$, $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$

* $\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ er (tilnærmet) normalfordelt (ok hvis $n \geq 30$ eller hvis hver X_i er normalf.)

Uely: konfidensnivå $\alpha \rightsquigarrow 100\% \cdot (1 - \alpha)$ konf. intervall

Formel: $(\bar{X} - z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n})$
konfidensintervall for μ når σ er kjent

b) χ_k^2 -fordeling: chi-kvadrattfordeling med k frihetsgr.

$Z_1, Z_2, \dots, Z_k$: uavhengige, std. normalf.

$\Rightarrow \underbrace{Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_k^2}_{\chi_k^2 \text{-fordelt}}$

Resultat: $X_1, X_2, \dots, X_n$ uavhengige, normalfordelte
stok. variable w/ $E(X_i) = \mu$, $Var(X_i) = \sigma^2$

||

$$Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2}{\sigma^2}$$

er χ^2_{n-1} -fordelt

① Student t-fordeling:

Anta: Z : std. normalfordelt $N(0,1)$

U : χ^2_n -fordelt

Z, U uavhengige

||

$$T = \frac{Z}{\sqrt{U/n}} \quad \text{t-fordelt med } n \text{ frihetsgrader}$$

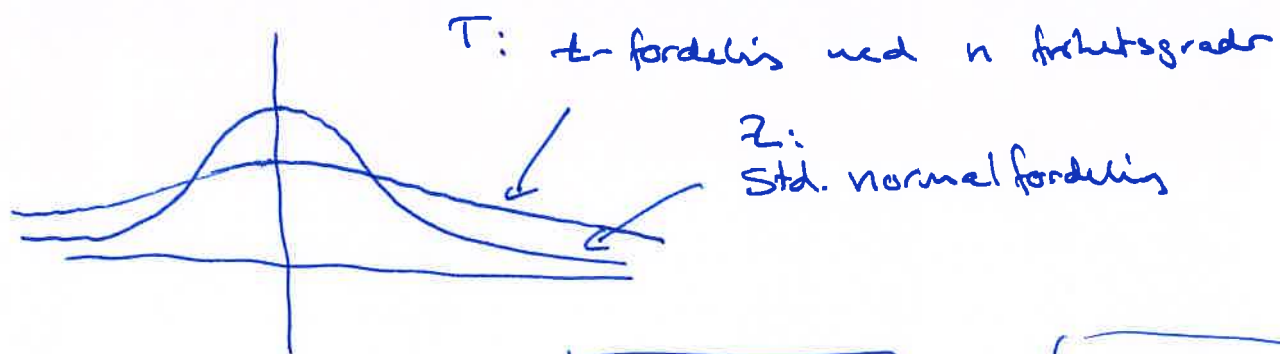
Hvis n er stor, så er T tilnærmet normalfordelt.

Viktig spesielt tilfelle:

$X_1, X_2, \dots, X_n$: uavhengige, normalfordelte $E(X_i) = \mu$,
 $Var(X_i) = \sigma^2$

||

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \quad \text{er T-fordelt med } n-1 \text{ frihetsgrader}$$



$$E(T) = 0$$

$$\text{Var}(T) > 1$$

Symmetrisk

$$E(Z) = 0$$

$$\text{Var}(Z) = 1$$

Symmetrisk

$X_1, X_2, \dots, X_n$ uavhengige, normalfordelte stok. variable
 med $E(x_i) = \mu$, $\text{Var}(x_i) = \sigma^2$

$\Downarrow$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \quad T\text{-fordelt med } n-1 \text{ frihetsgrader}$$

* hvis n er stor, er T -fordeling med $n-1$ frihetsgrader tilnærmet lik standard normalford.

Konfidensintervall for μ når σ er ukjent:

$$\left(\bar{X} - t_{\alpha/2}^{n-1} \cdot S/\sqrt{n}, \bar{X} + t_{\alpha/2}^{n-1} \cdot S/\sqrt{n} \right)$$

$(1-\alpha) \cdot 100\%$ konfidensintervall for μ

$$\begin{array}{l} \text{Merk:} \quad A = \bar{X} - t_{\alpha/2}^{n-1} \cdot S/\sqrt{n} \\ \quad \quad B = \bar{X} + t_{\alpha/2}^{n-1} \cdot S/\sqrt{n} \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} A \\ B \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Stokastiske} \\ \text{variable} \end{array}$$

o.o

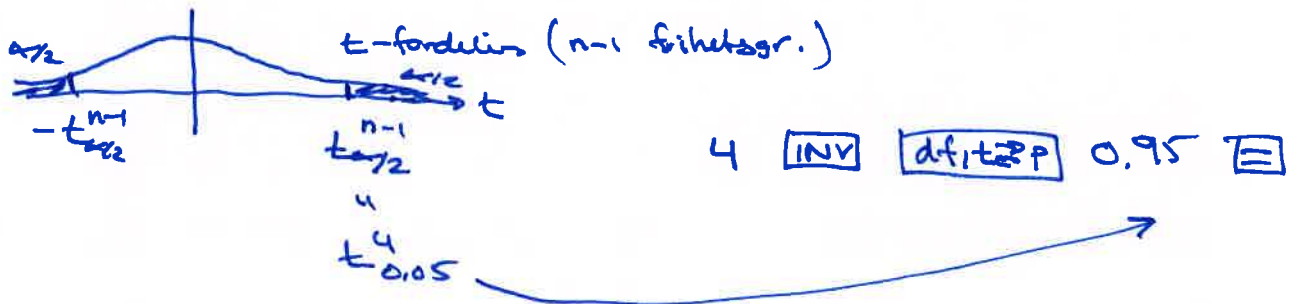
$$P(A \leq \mu \leq B) = 1 - \alpha$$

E6:

$$\alpha = 0.10$$

$$n = 5$$

$$t_{\alpha/2}^{n-1}$$

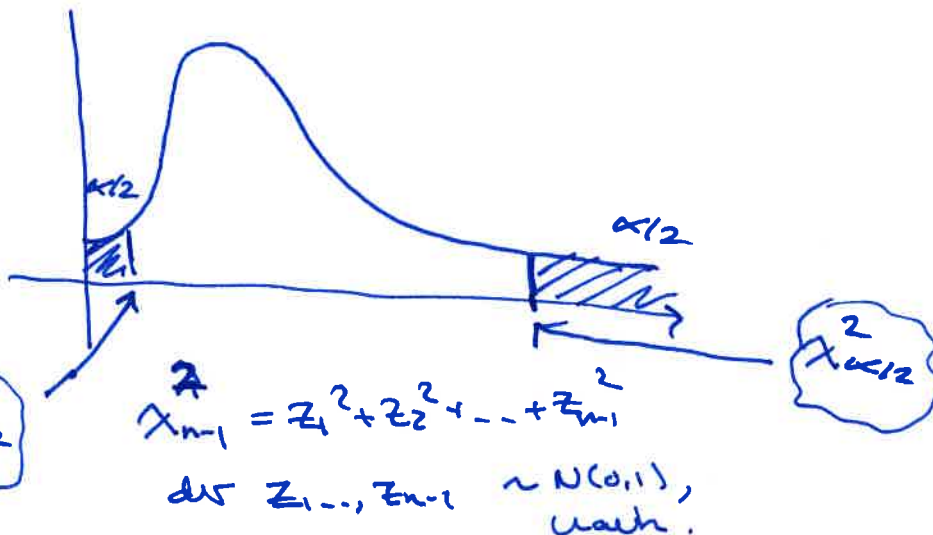


③ Konfidensintervall for σ^2

Anta: $x_1, x_2, \dots, x_n$ uavh. normalf. variabler
med $E(x_i) = \mu$, $\text{Var}(x_i) = \sigma^2$

Uely: konfidensnivå $1 - \alpha \leadsto (1 - \alpha) \cdot 100\%$ konfidensintervall

$$\left[\frac{s^2 \cdot (n-1)}{\chi_{\alpha/2}^2}, \frac{s^2 \cdot (n-1)}{\chi_{1-\alpha/2}^2} \right]$$

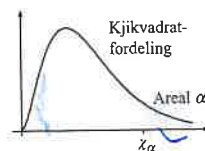


Kvantiler for
 χ_{n-1}^2 -fordeling:

Finnes disse
i tabell E.6.

E.6 Kvikvadratfordelingens kvantiltabell

Tabellen viser den kritiske verdien χ_α for forskjellige valg av nivået α .



Antall frihetsgrader	Areal α						Areal α					
	0,998	0,995	0,990	0,975	0,950	0,900	0,100	0,050	0,025	0,010	0,005	0,002
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	9,55
2	0,00	0,01	0,02	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60	12,43
3	0,04	0,07	0,11	0,22	0,35	0,58	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84	14,80
4	0,13	0,21	0,30	0,48	0,71	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86	16,92
5	0,28	0,41	0,55	0,83	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75	18,91
6	0,49	0,68	0,87	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55	20,79
7	0,74	0,99	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28	22,60
8	1,04	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95	24,35
9	1,37	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59	26,06
10	1,73	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19	27,72
11	2,13	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	17,28	19,68	21,92	24,73	26,76	29,35
12	2,54	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30	30,96
13	2,98	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82	32,54
14	3,44	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32	34,09
15	3,92	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80	35,63
16	4,41	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27	37,15
17	4,92	5,70	6,41	7,56	8,67	10,09	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72	38,65
18	5,44	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16	40,14
19	5,97	6,84	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58	41,61
20	6,51	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00	43,07
21	7,07	8,03	8,90	10,28	11,59	13,24	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40	44,52
22	7,64	8,64	9,54	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80	45,96
23	8,21	9,26	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18	47,39
24	8,80	9,89	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56	48,81
25	9,39	10,52	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93	50,22
26	9,99	11,16	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29	51,63
27	10,60	11,81	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96	49,65	53,02
28	11,21	12,46	13,56	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99	54,41
29	11,83	13,12	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34	55,79
30	12,46	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67	57,17
31	13,10	14,46	15,66	17,54	19,28	21,43	41,42	44,99	48,23	52,19	55,00	58,54
32	13,73	15,13	16,36	18,29	20,07	22,27	42,58	46,19	49,48	53,49	56,33	59,90
33	14,38	15,82	17,07	19,05	20,87	23,11	43,75	47,40	50,73	54,78	57,05	61,26
34	15,03	16,50	17,79	19,81	21,66	23,95	44,90	48,60	51,97	56,06	58,96	62,61
35	15,69	17,19	18,51	20,57	22,47	24,80	46,06	49,80	53,20	57,34	60,27	63,95
40	19,03	20,71	22,16	24,43	26,51	29,05	51,81	55,76	59,34	63,69	66,77	70,62
45	22,48	24,31	25,90	28,37	30,61	33,35	57,51	61,66	65,41	69,96	73,17	77,18
50	26,01	27,99	29,71	32,36	34,76	37,69	63,17	67,50	71,42	76,15	79,49	83,66
60	33,27	35,53	37,48	40,48	43,19	46,46	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95	96,40
70	40,75	43,28	45,44	48,76	51,74	55,33	85,53	90,53	95,02	100,43	104,21	108,93
80	48,40	51,17	53,54	57,15	60,39	64,28	96,58	101,88	106,63	112,33	116,32	121,28
100	64,11	67,33	70,06	74,22	77,93	82,36	118,50	124,34	129,56	135,81	140,17	145,58

Tabellverdiene er beregnet med Excel-funksjonen INVERS.KJI.FORDELING(alfa;frihetsgrad).

For et høyere antall frihetsgrader (n) kan du benytte formelen $\chi_\alpha = n + z_\alpha \sqrt{2n}$, der z_α er den tilsvarende kritiske verdien for normalfordelingen (se tabell E.4).

Stik

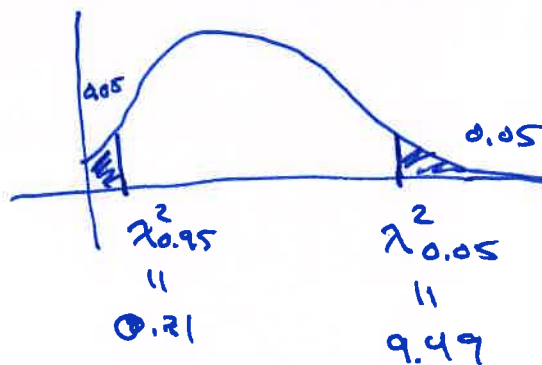
A

a posteriori-sann:
a priori-sannsynl
acceptance samp
addisjonsregel
– disjunkte henn
– generell 95,
– uavhengige h
akseptanskonto
– basert på defi
– basert på mål
– stikkprøvestø
– variabelmeto
aksjeanalyse
algoritme 22
alternativ hypo
ANOVA 346
aritmetisk mid
ARMA-model
attributtkontro
autokorrelasjo
avhengig vari
se: respons
avvikskvadrat

B

badekarkurve
Bayes' regel
bayesiansk p
bayesiansk s
begrenset po
Bernoulli-fo
beslutningss
beslutningst
bestemt utv

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 0.10 \\ n = 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \chi^2_{0.05} \\ \chi^2_{0.95} \end{array}$$



Konfidensintervall:

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.05}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.95}} \right]$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

④ Konfidensintervall for p

X : binomisk fordelt med parameter (n, p)
 og der n er stor slik at X
 er tilnærmet normalfordelt.

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

$$\hat{p} = \frac{X}{n}$$

Konfidensintervall:

$$\left[\hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$$

Husk: $X \sim \text{Binom}(n, p)$

$$\Rightarrow \text{Var}(X) = n \cdot p \cdot q = n \cdot p(1-p)$$

$$\Rightarrow \text{Var}(\hat{p}) = \text{Var}\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{p(1-p)}{n}$$

Ekse:

$$n = 200$$

$$X = 34$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\hat{p} = \frac{X}{n} = \frac{34}{200} = \frac{17}{100} = 0.17$$

$$\left[\hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$$

$$\hat{p} = 0.17$$

$$z_{\alpha/2} = 1.960$$

$$\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{0.17 \cdot 0.83}{200}} = 0.0266$$

$$\begin{aligned} & [0.17 - 0.052, \\ & \quad 0.17 + 0.052] \\ & = \underline{\underline{[0.118, 0.222]}} \end{aligned}$$