

Forelesning 12

MET1190

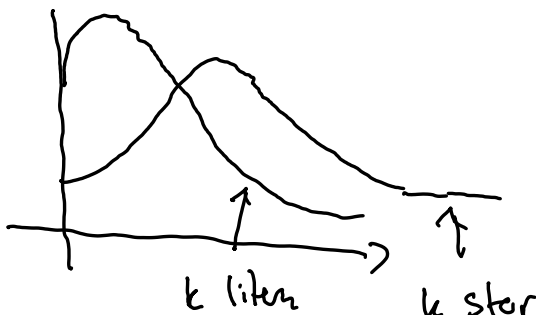
Plan:

- ① Repetisjon: Forelesning 11
- ② Introduksjon til hypotesetester

①

Repetisjon: Forelesning 11

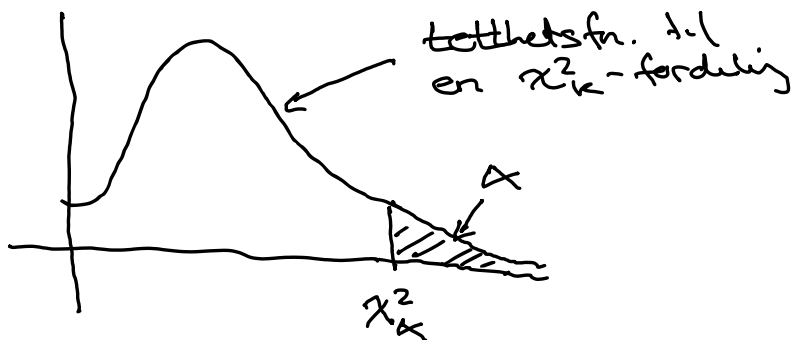
- i) χ_k^2 -fordeling: $\chi_k^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_k^2$
(chi kvadratfordeling med k frihetsgrader) ($Z_1, \dots, Z_k$ er uavhengige, std. normalfordelte var.)



Mer:

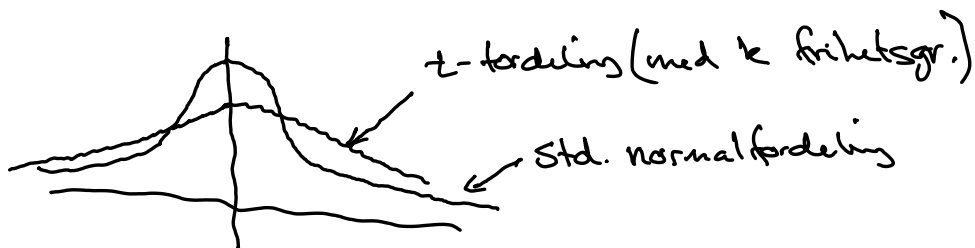
χ_k^2 har bare positive verdier,
ikke symmetrisk

Vi trenger noen ganger kvantiler for χ^2_k -fordelinger, $\chi^2_{\alpha, k}$. Det er definert ved $P(X > \chi^2_{\alpha, k}) = \alpha$:



ii) Student t-fordeling = t-fordeling

En t-fordeling med k frihetsgrader har en form som likner std. normalford.



Jo større k , jo nærmere er t-fordeling med k frihetsgrader en std. normalfordeling.

Resultat:

$X_1, \dots, X_n$ uavhengige normalfordelte
variabler med $E(X_i) = \mu$,
 $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$

||

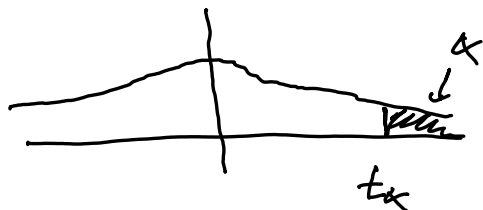
1) $T = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$ t-fordelt med $n-1$
frihetsgr

2) $Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ χ^2_{n-1} -fordelt ($n-1$ frihetsgr.)

Kvantilene for t-fordelingen er gitt ved

$$P(T > t_{\alpha}) = \alpha.$$

Vi skriver t_{α}^k når
vi mener kvantilet
for t-fordelingen med
 k -frihetsgrader



Hvordan finne kvantiler:

i) χ^2_k : Bruk tabell E6 i boken.

ii) t_{α}^k : Bruk kalkulator $[df, t \geq P]$
og $[INV] [df, t \geq P]$.

Eksempel:

For å finne kvantilet $t_{\alpha/2}^{n-1}$

når $\alpha = 0.05$, $n = 10$:

Kalk:

9 [INV] [df, t2p] 0.975 [=]

$$\rightarrow t_{0.025}^9 \approx \underline{\underline{2.262}}$$

Hvis kalkulatoren ikke klarer denne beregningen, er sannsynligvis batteriet dårlig.

iii) Konfidensintervall:

Et konfidensintervall for parameteren θ på signifikansenivå α er et intervall $[A, B]$ med stokastiske grenser A, B slike at

$$p(A \leq \theta \leq B) = 1 - \alpha$$

i) Z-intervall: Konfidensintervall for μ når σ er kjent

Anta: $X_1, \dots, X_n$ uavhengige, identiske fordelte var. med $E(X_i) = \mu$, $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$

og

$\bar{X}$ normalfordelt (tilnærmet)

Intervall: $\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \cdot \sigma / \sqrt{n}$

ii) T-intervall: konfidensintervall for μ når σ er ukjent

Anta: $X_1, \dots, X_n$ uavhengige og normalfordelte $N(\mu, \sigma^2)$.

Intervall: $\bar{X} \pm t_{\alpha/2}^{n-1} \cdot S / \sqrt{n}$

iii) Konfidensintervall for σ^2 :

Anta: $X_1, \dots, X_n$ uavhengige, normalfordelte
 $N(\mu, \sigma^2)$

Intervall:

$$\left[\frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{\alpha/2}}, \frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{1-\alpha/2}} \right]$$

med kverntallene fra en
 χ^2_{n-1} -fordeling, med $n-1$
frihetsgrader

iv) Konfidensintervall for p :

Anta: X binomisk fordelt $\text{Binom}(n, p)$
 n stor ($n \cdot \hat{p} \cdot (1 - \hat{p}) \geq 5$)

Intervall:

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

med $\hat{p} = X/n$

② Introduksjon til hypotesetest

Hypotesetest: Vi tar stilling til en påstand om en parameter θ
(for eksempel μ, p , etc)

Hypoteser:

H_0 : nullhypotese

H_1 : alternativ hypotese

Udy $H_1 =$ det vi ønsker å vise, og H_0 lik komplementet.

Vi må velge: — forkaste H_0
(basert på data) (vi tror H_1 er sann)
— beholde H_0
(vi tror ikke H_1 er sann)

	H_0 sann	H_1 sann	← objektiv sannhet
Beholde H_0	ok	Type II feil	
Førkaste H_0	Type I feil	ok	

↑
beslutning

Type I feil: "uskyldig dømt"
Type II feil: "skyldig går fri"

Type I feil er mest alvorlig, og vi setter en grense α = signifikansnivå for hvor stor sannsynlighet for Type I feil vi aksepterer

Vi velger en testobservator, og regner ut forkastingsområdet for denne basert på α . Basert på den observerte verdien til testobservatoren (data), velger vi:

✓ $\hat{a}$ forkaste H_0 hvis vi har
i forkastningsområdet

✓ $\hat{a}$ beholde H_0 ellers

Dette er vår beslutningsregel.

Eksempel: En pose med ~~terrører~~ skal
veie 500 g. Vi mistenker at
den systematisk inneholder
mindre enn 500 g.

① Vely modell og hypotese

Vi tenker oss vekt i g. til en
tilfeldig pose av denne typen er
normalfordelt $N(\mu, \sigma^2)$

Hypotese: $\left\{ \begin{array}{l} H_0: \mu \geq 500 \\ H_1: \mu < 500 \end{array} \right\}$

③ Vely testobservater og formen p
forkastingsområdet.

Vi tenker oss at vi gjør n
uavhengige målinger $x_1, \dots, x_n$.

Sen testobservater kan vi bruke $\bar{X}$.
Derfor vi finner $\bar{X}$ som er mye
mindre enn 500, vil vi forkaste H_0

Forkastingsområde: $\bar{X} < \text{kritisk}$
 verdi
(venstresidig)

④ Vely signifikansnivå α :

For å bestemme hvor mye mindre
enn 500 $\bar{X}$ må være før vi forkaster
 H_0 , må vi velge α , og regne
ut kritisk verdi basert på dette.

Vi velger $\alpha = 0.05$ (et vanlig
valg).

① Finn kritisk verdi

I eksemplet er det to ulike måter å gjøre det på:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Z-test: } \sigma \text{ er kjent} \\ \text{T-test: } \sigma \text{ er ukjent} \end{array} \right\}$

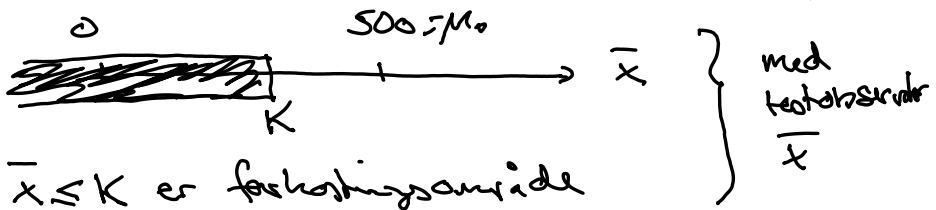
Siden σ er ukjent, bruker vi T-test:

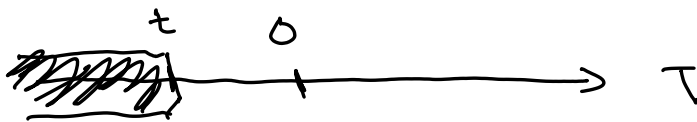
$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

med $\mu_0 = 500$
(grenseverdien i hypotesene)

Vi bruker T heller enn $\bar{X}$ siden

$\mu = \mu_0 \Rightarrow T$ er t-fordelt med $n-1$ frihetsgrader.

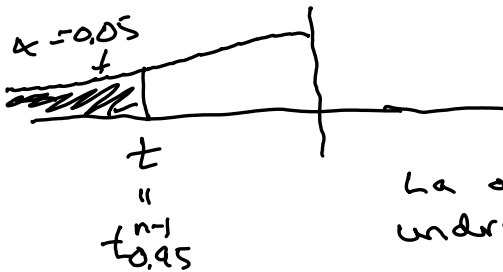




$T < t$: forkastnings-
 område

} test observator
 T

Dette betyr: $p(T < t | \mu = \mu_0) = \alpha$
 er likelihooden vi bruker
 for å finne t (kritisk
 verdi for T)



La oss si at vi
 undersøker $n=10$ personer.
 Da er $t = t_{0.95}^9 \approx \underline{-1.833}$

Forkastningsområde:

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} < -1.833$$

↑
 kritisk
 t-verdi

Vi har gjort en kritisk
t-verdi til kritisk verdi for $\bar{X}$:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} < -1.833$$

$$\bar{X} - \mu_0 < -1.833 \cdot S/\sqrt{n}$$

$$\boxed{\bar{X} < \mu_0 - 1.833 \cdot S/\sqrt{n}}$$

kritisk verdi
for $\bar{X}$.

⑤ Satt inn data, finne observert
verdi og ta beslutning:

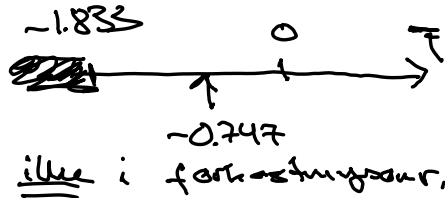
Anta at vi undersøker $n=10$ pass,
og finner $\bar{x} = 494.9$ og $s = 21.6$,

Da har vi:

$$T = \frac{494.9 - 500}{21.6/\sqrt{10}} \approx -0.747$$

Forkastningsområde: $T < -1.833$

Beslutning: Beholder
 H_0

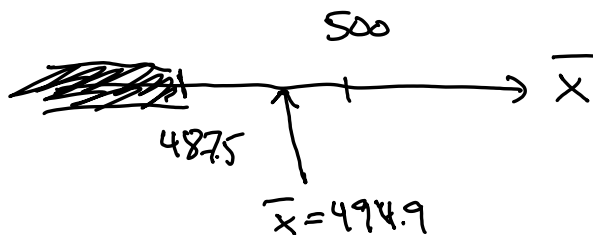


Alt: Kritisk verdi for $\bar{X}$:

$$\begin{aligned}\mu_0 - 1.833 \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \\ = 500 - 1.833 \cdot \frac{21.6}{\sqrt{10}} \\ \approx \underline{487.5}\end{aligned}$$

Førkastingsområde: $\bar{X} < 487.5$

$$\bar{x} = 494.9 \Rightarrow \text{Beholder } H_0$$



Hypotesetest: Oppsummering

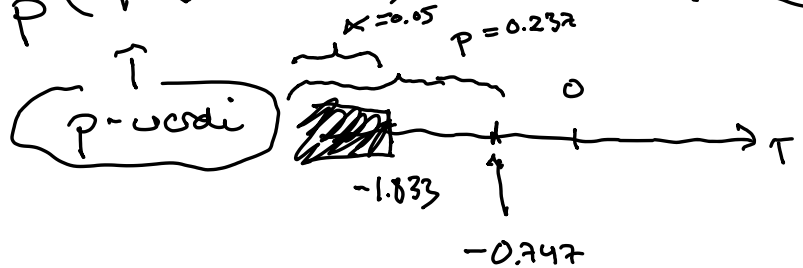
- (A) Uely modell og hypotese
- (B) Behn testobservator og formen på forkastingsområdet
- (C) Uely signifikansenivå α
- (D) Finn kritisk verdi
- (E) Ta beslutning basert på data.

p-verdi:

I en hypotese test er p-verdi lik sannsynligheten for at testobservator er minst like ekstrem som den vi finner.

Ex: I test overfor fant vi $T \approx -0.747$

$$P(T < -0.747) = 0.237 = \underline{23.7\%}$$



Beslutningsregel basert på p-verdi:

$P \geq \alpha$: Behold H_0

$P < \alpha$: Forkast H_0

Styrke funksjon:

Sannsynlighet
for Type II feil.

$\delta(\mu) =$ sannsynlighet for å
forkaste H_0 for en
gitt sann verdi for μ

Symbol
for styrkefunksjonen
($\gamma = \text{gamma}$)

Ekse: $\delta(495) = P(\bar{X} < 487.5 \mid \mu = 495)$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{487.5 - 495}{21.6/\sqrt{10}}\right)$$
$$= P(T < -1.298)$$
$$\stackrel{A}{=} \underline{\underline{0.15}} = 15\%$$

Siden $495 < 500$, burde vi forkaste H_0
mens det kun er 15% sannsynlighet
for at vi gjør det.