Forelesning 16

MET1190

Plan:

1. Om eksamen
2. Eksamen 06/2019

1. Om eksamen

Wiseflow:
- leveres som en pdf : wiseflow, håndskrevet
- Skriv id-nr øverst på hver side
- viktig hvordan besvarelsen skrives (begrunnelser)

Eksamensoppgaves:
- eksamenstid: 3t + 1t
- oppgaver: 14 deloppgaver
- oppgavetyper som før
- Oppsumering av kurset: A-B-C

Vurdering: B / IB helhetsvurdering,
indikasjon: 40% - 60% grense

② Eksamen 06/2019

1. a) På hvert spm.: 3 alternativer
1 riktig
velger tilfeldig
$\Downarrow$
$p = 1/3$
sannsynlighet
for riktig svar

X = antall riktig svar
Binomisk fordelt: $n = 90$
$p = 1/3$

$E(X) = n \cdot p = 90 \cdot 1/3 = \underline{\underline{30}}$

b) $P(X \geq 30) = ?$ Bruk
normaltilnærming

$$E(X) = n \cdot p = 90 \cdot 1/3 = \underline{30} \leftarrow \mu = 30$$

$$Var(X) = n \cdot p \cdot (1-p) = 90 \cdot 1/3 \cdot 2/3$$
$$= \underline{20} \leftarrow \sigma^2 = 20$$

X er tilnærmet normalfordelt $N(\mu, \sigma^2)$

med $\mu = 30$, $\sigma^2 = 20$

(god tilnærming siden $\sigma^2 > 5$)

heltalls-korreksjon

$$P(X \geq 30) = 1 - P(X \leq 29)$$

$$\simeq 1 - P\left(Z \leq \frac{29 - 30 + 0.5}{\sqrt{20}}\right)$$

$$= 1 - G\left(\frac{-1 + 0.5}{\sqrt{20}}\right) = 1 - G(-0.112)$$

$$\simeq \underline{\underline{0.54}}$$

$(-0.5\ \boxed{\div}\ 20\ \boxed{\sqrt{x}}\ \boxed{=}\ \boxed{Z \rightleftarrows P}\ \boxed{+/-}\ \boxed{+}1\ \boxed{=})$

c) R : antall riktige svar for student B

$$p_B = p(\text{riktig svar} \mid \text{treffer}) \cdot p(\text{treffer}) + p(\text{riktig svar} \mid \text{bommer}) \cdot p(\text{bommer})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 0.60 + 0 \cdot 0.40$$

$$= \underline{0.30}$$

Forventer at <u>B vil gjøre det dårligere</u>: $p_B = 0.30 < p_A = 1/3$

$E(R) = 90 \cdot 0.3 = 27 < E(X) = 30$

2.

0.58% 0.80% -2.41% 0.37% -0.30%

-0.16% -1.05% -0.45% 0.96% -0.21%

-0.75%

a) -2.41% -1.05% -0.75% -0.45% -0.3% -0.21% -0.16% 0.37% 0.58% 0.80% 0.96%

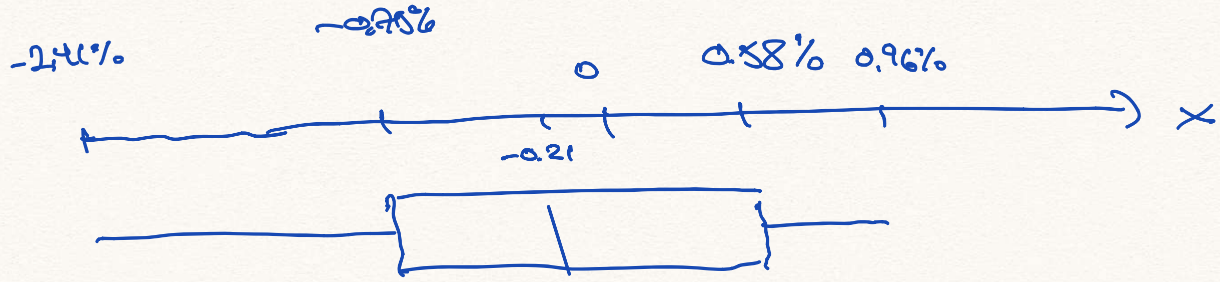
median: $x_6 = -0.21\%$

Øvre kvartil: $0.58\% = x_9$

nedre kvartil: $-0.75\% = x_3$

Kvartilbredde: $0.58\% - (-0.75\%)$

$= 1.33\%$



b) $\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_{11}}{11} \simeq -0.2927\ \%$

$S_x = \sqrt{\frac{1}{11-1} \sum (x_i - \bar{x})^2} \simeq 1.027$

Konfidensintervall: $\bar{x} \pm t^{n-1}_{\alpha/2} \cdot S_x/\sqrt{n}$

$t^{n-1}_{\alpha/2} = t^{10}_{0.065} \simeq 1.650$ $\left\{ \begin{array}{l} 10 \ \boxed{\text{INV}} \ \boxed{t \to P} \\ 0.935 \ \boxed{=} \end{array} \right.$

$87\% = 1 - \alpha$
$\alpha = 13\% = 0.13$

$-0.29\% \pm 1.650 \cdot 1.027/\sqrt{11}$

$= -0.29\% \pm 0.51\% \rightarrow [-0.80\%, 0.22\%]$

c) Hver X_i er normalfordelt
uavhengige trekninger

For: Hver X_i er bestemt av mange faktorer som i stor grad er uavhengige → normalfordeling

Mot: trekker 11 første h. dager i mai, ikke uavhengige

3.

X	29	54	40	41	45	18
Y	60	30	52	44	36	81

a) $r = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y} = \frac{\frac{1}{n-1}\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum(y_i-\bar{y})^2}}$

$\boxed{r} \simeq \underline{-0.9808}$

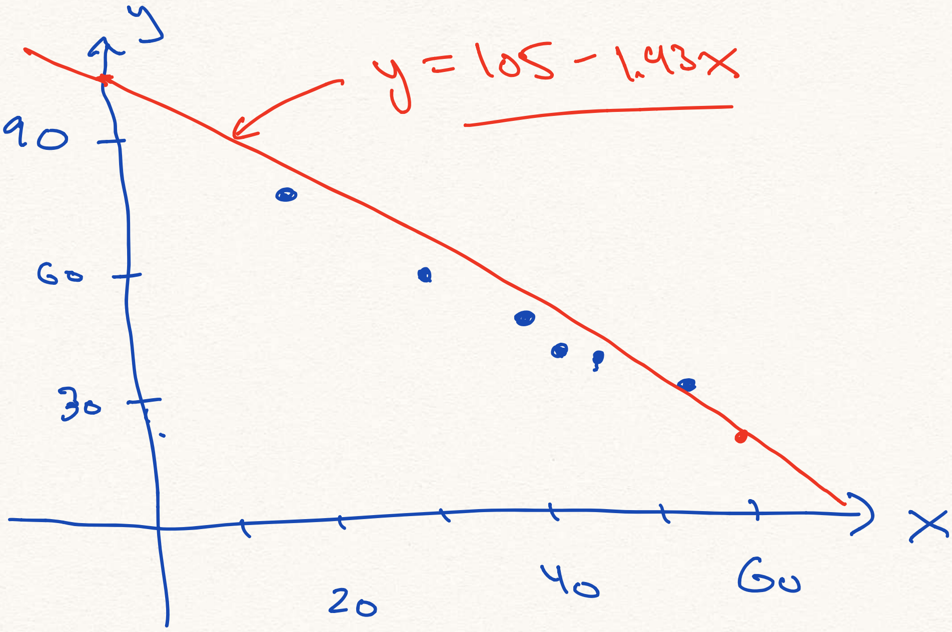
Sterk negativ sammenheng mellom x og y siden r er nært -1.

b) $y = \alpha + \beta x + \varepsilon$ regresjonslikning

$\boxed{m}$ $\hat{\beta} = r \cdot \frac{S_y}{S_x} \simeq \underline{-1.4290}$

$\boxed{b}$ $\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \cdot \bar{x} \simeq \underline{104.6}$

Likn: $\boxed{y = 105 - 1.43 \cdot x}$



$$y = 105 - 1.43x$$

Ser at tegningen blir unøyaktig, det skal være like store avvik over og under regr. linjen.

c) Hypotesetest:

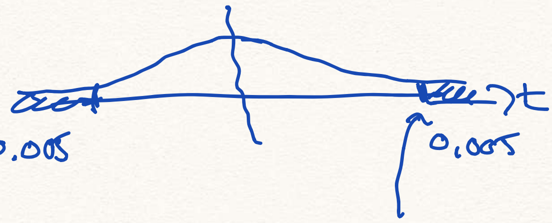
$$\boxed{\begin{array}{l} H_0 : \beta = 0 \\ H_1 : \beta \neq 0 \end{array}}$$

ingen sammenheng mellom X og Y

$$T = \frac{\hat{\beta} - \beta_0}{SE(\hat{\beta})}$$

t-fordelt med n-2 frihetsgrader hvis $\beta = \beta_0 = 0$.

Forkastingsområde: $\alpha = 1\%$



Forkastingsområde:

$T > 4.60$ eller $T < -4.60$,

dvs $|T| > 4.60$

(tosidig)

$$t^{n-2}_{\alpha/2} = t^{4}_{0.005} \simeq 4.60$$

$\boxed{\text{Vi starter igjen kl. 1300}}$

$\beta > 0$: positiv sammenheng mellom X, Y

$\beta < 0$: negativ " —"—

$\beta \neq 0$: sammenheng —"—

$$SE(\hat{\beta})^2 \approx \frac{s_y^2 \cdot (1-r^2)}{(n-2)\cdot s_x^2} \approx 0.0201$$

$$\| $$

$$\frac{\sigma^2}{(n-1)s_x^2}, \quad \sigma^2 \text{ tilnærmes ved } s^2 = \frac{\Sigma(y_i-\bar{y})^2(1-r^2)}{n-2}$$

Kalk: $\boxed{r}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{=}$

$\boxed{*}$ $\boxed{s_y}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$

$\boxed{\div}$ $\boxed{s_x}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$

$\boxed{\div}$ 4 $\boxed{=}$ $\rightarrow$ 0.0201

$$T = \frac{\hat{\beta}-\beta_0}{SE(\hat{\beta})} = \frac{-1.43-0}{\sqrt{0.0201}} \approx \underline{-10.1}$$

Fork. omr.: $|T| > 4.60$

$\Rightarrow$ Vi <u>forkaster H_0</u>, det er sammenheng mellom X og Y.

4.

a) $H_0: \mu \geq \mu_0$

$H_1: \mu < \mu_0$ venstresidig test.

Testobservator:

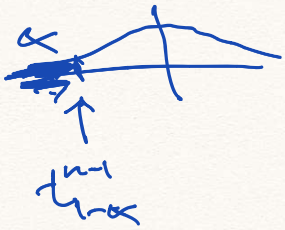
$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$$

Fordeling:

$\mu = \mu_0$: t-fordelt med $n-1$ frihetsgrader

Forkastingsområde:

$$T < t_{1-\alpha}^{n-1} = -t_{\alpha}^{n-1}$$



b) $p < \alpha$: Forkaster nullhypotesen

$p \geq \alpha$: Beholder — " —

$p =$ samsynligheten for å få den realiserte t-verdien, eller noe som er ennå mer ekstremt, gitt at H_0 er sann.

5.

X_1 $\mu_1 = 0.10$ $\sigma_1 = 0.12$

X_2 $\mu_2 = 0.18$ $\sigma_2 = 0.16$

X_3 $\mu_3 = 0.08$ $\sigma_3 = 0.07$

$Cov(X_1, X_2) = 0.015$

$Cov(X_1, X_3) = 0$

$Cov(X_2, X_3) = -0.01$

a) $$p(0.05 < X_1 < 0.15) = p\left(\frac{0.05-0.10}{0.12} \leq Z \leq \frac{0.15-0.10}{0.12}\right)$$

$$= p(-5/12 \leq Z \leq 5/12) = G(5/12) - G(-5/12)$$

$$\simeq G(0.417) - G(-0.417)$$

$$\simeq 0.662 - 0.338 \simeq \underline{\underline{0.32}}$$

$$5 \boxed{\div} 12 \ \boxed{Z \to P} \to 0.662$$

b) $$U = 0.4X_1 + 0.6X_2$$

$$Var(U) = Var(0.4X_1 + 0.6X_2)$$

$$= Cov(0.4X_1 + 0.6X_2, 0.4X_1 + 0.6X_2)$$

$$= 0.4^2 \cdot Var(X_1) + 2 \cdot 0.6 \cdot 0.4 \ Cov(X_1, X_2) + 0.6^2 \cdot Var(X_2)$$

$$= 0.16 \cdot \underbrace{0.12^2}_{\sigma_1^2} + 0.48 \cdot 0.015 + 0.36 \cdot \underbrace{0.16^2}_{\sigma_2^2}$$

$$= 0.01872$$

$$\sigma_U = \sqrt{0.01872} \simeq \underline{\underline{0.1368}}$$

c) $V = 0.4X_1 + 0.2X_2 + 0.4X_3$

$$E(V) = 0.4\cdot\mu_1 + 0.2\cdot\mu_2 + 0.4\cdot\mu_3$$
$$= 0.4\cdot 0.10 + 0.2\cdot 0.18 + 0.4\cdot 0.08$$
$$= \underline{0.108} = \mu_V$$

$p(V<0) = ?$ V er normalfordelt siden X_1, X_2, X_3 er normalf.

$$Var(V) = 0.4^2\cdot\sigma_1^2 + 0.2^2\cdot\sigma_2^2 + 0.4^2\cdot\sigma_3^2$$

$\sigma_1^2 \leftarrow 0.12^2$, $\sigma_2^2 \leftarrow 0.16^2$, $\sigma_3^2 \leftarrow 0.07^2$

$$+ 2\cdot 0.4\cdot 0.2\cdot Cov(X_1, X_2) \leftarrow 0.015$$
$$+ 2\cdot 0.2\cdot 0.4\, Cov(X_2, X_3) \leftarrow -0.01$$

$$\simeq 0.0049$$

$$\sigma_V \simeq \sqrt{0.0049} = \underline{0.07}$$

$$p(V<0) = p\left(Z < \frac{0-0.108}{0.07}\right) = p(Z < -1.54)$$
$$= G(-1.54) \simeq \underline{\underline{0.062}}$$

$$Var(aX+bY) = a^2 \cdot Var(X) + b^2 \cdot Var(Y)$$

hvis $Cov(X,Y) = 0$

Generelt:

$$Var(aX+bY) = Cov(aX+bY, aX+bY)$$

$$= Cov(aX, aX) + Cov(aX, bY)$$

$$+ Cov(bY, aX) + Cov(bY, bY)$$

$$= \underline{a^2 \cdot Var(X)} + ab\ Cov(X,Y)$$

$$+ ba \cdot Cov(Y,X) + b^2 \cdot \underline{Var(Y)}$$

$$= \underline{a^2 \cdot Var(X) + b^2 \cdot Var(Y)}$$

$$\underline{+ 2ab \cdot Cov(X,Y)}$$