Plan

1 Betinget sannsynlighet
2 Uavhengighet

Repetisjon:

Stokastisk forsøk:

$S = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ utfallsrom

p : sannsynlighetsmål

$A \subseteq S \rightsquigarrow p(A)$

hendelse (delmengde av utfallsrommet)

Krav til sannsynlighetsmål:

i) $p(A) \geq 0$ for alle hend. A

ii) $p(S) = 1$

iii) $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ når A, B hendelser med $A \cap B = \emptyset$ (disjunkte, ingen felles utfall)

eller mer generelt

$p(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = p(A_1) + p(A_2) + \ldots$ når $A_1, A_2, \ldots$ er hendelsen samme er parvis disjunkte ($A_i \cap A_j = \emptyset$ for $i \neq j$)

Regneregler for sannsynlighetsmål:

i) $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

ii) $p(\emptyset) = 0$

iii) $p(A) \leq p(B)$ når $A \subseteq B$

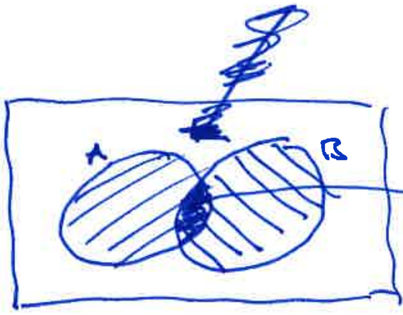
iv) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Mengder:

$A \cup B$ = "A union B" = alle utfall i A eller i B

$A \cap B$ = "A snitt B" = alle utfall i A og B

$\bar{A}$ = "A komplement" = alle utfall som ikke er med i A (utenfor A)
" A^c



Alt som er skravert: $A \cup B$

$A \cap B$

Uniform sannsynlighet: alle utfall er like sannsynlige

$$\boxed{p(A) = \frac{\text{"antall gunstige"}}{\text{"antall mulige"}} = \frac{\text{antall utfall i } A}{\text{antall utfall i } S}}$$

gjelder kun ved uniform sannsynlighet!

Urnemodell: Vi har n kuler (nummererte) i en urne. Vi skal trekke r kuler (tilfeldig).

	med tilbakelegging	uten tilbakelegging
ordnet	n^r	$n\cdot(n-1)\cdots(n-r+1) = \boxed{{}_nP_r}$
uordnet	$\binom{n+r-1}{r}$	$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r\cdot(r-1)\cdots(2)\cdot 1} = \boxed{{}_nC_r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$

formler for antall måter å trekke r kuler på

Oppgavesett 7, Opps 2:

a) Ordnet, med tilbakelegging: 6^5

b) Uordnet, med tilbakelegging: $n=6$, $r=5$

$$\binom{n+r-1}{r} = \binom{10}{5} = \frac{\cancel{10}\cdot 9\cdot \cancel{8}\cdot 7\cdot \cancel{6}}{\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} = \frac{2\cdot 9\cdot 2\cdot 7 \cdot 2}{1} = 252$$

c) $p(5 \text{ like}) =$

A = "5 like" 6 (sels) utfall

S = alle utfall

Ordnet: $p(A) = \dfrac{6}{6^5} = \dfrac{1}{6^4}$

Eks: to terninger

	1	2	3	4	5	6
1		•				
2	•	■				
3						
4						
5						
6						

$6^2 = 36$ ordnet uniformt

uordnet: $(1,2), (2,1)$ $p = \frac{2}{36}$

$(2,2)$ $p = 1/36$

ikke uniformt

Opps 9e)

Vi trekker fem kort fra en kortstokk. Antall måter å få ett par på:

$\boxed{9S}$ $\boxed{9R}$ $\boxed{1K}$ $\boxed{10S}$ $\boxed{2H}$

ett par: $13\cdot\binom{4}{2} = \binom{13}{1}\cdot\binom{4}{2} = 13\cdot\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}$

$= 13\cdot 6 = 78$

utenfor par:

$\binom{12}{3}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1}$

$= \frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 4^3$

$= 220\cdot 64$

Totalt: $\binom{13}{1}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{12}{3}\cdot\binom{4}{1}^3 = 78\cdot 220\cdot 64$

① Betinget sannsynlighet

A, B : to hendelser

$p(A|B)$ = sannsynligheten for A gitt B = sannsynligheten for at A inntreffer, gitt at B inntreffer

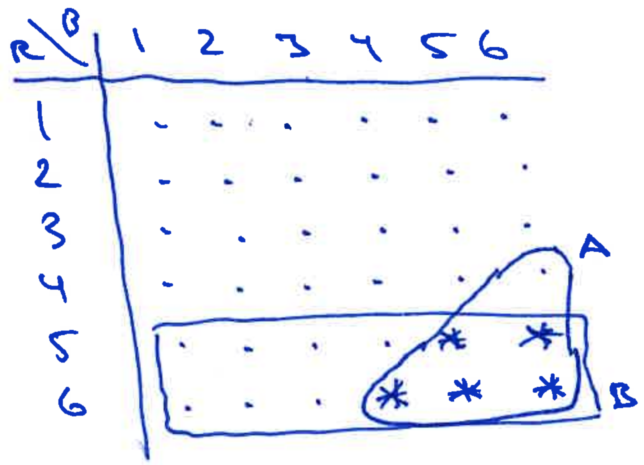
betinget sannsynlighet

Defn: $$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$ (antar $p(B) \neq 0$)

Eks: Vi kaster en rød og en blå terning

A: summen er minst 10

B: rød terning viser 5 eller 6



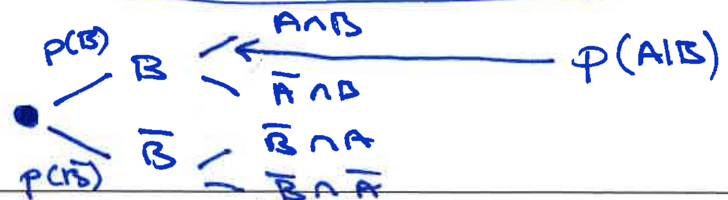
$$p(A) = \frac{6}{36} = 1/6$$

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{5/36}{12/36} = \frac{5}{12}$$

Nyttig formel:

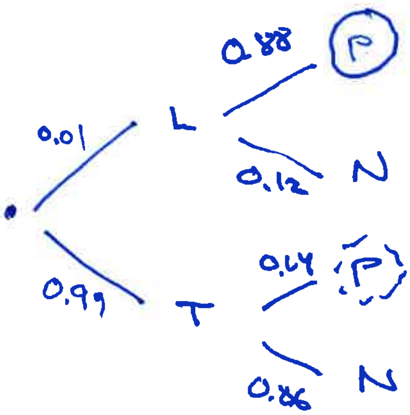
$$p(A \cap B) = p(A|B) \cdot p(B)$$

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$



Eks: Løgndetektor: "A" $\begin{cases} L = \text{løgn} \\ T = \text{ikke løgn} \end{cases}$

"B" $\begin{cases} P = \text{positivt utslag} \\ N = \text{negativt utslag} \end{cases}$



Antar:

$p(L) = 0.01$

$p(P|L) = 0.88$

$p(P|T) = 0.14$

$$p(L \cap P) = p(L) \cdot p(P|L) = 0.01 \cdot 0.88 = \underline{0.0088}$$

$$p(L|P) = \frac{p(L \cap P)}{p(P)} = \frac{p(L) \cdot p(P|L)}{p(P)}$$

$$\boxed{p(L|P) = \frac{p(L) \cdot p(P|L)}{p(L) \cdot p(P|L) + p(T) \cdot p(P|T)}}$$

$$\begin{aligned} p(P) &= p(P \cap L) + p(P \cap T) \\ &= p(L) \cdot p(P|L) + p(T) \cdot p(P|T) \\ &= 0.01 \cdot 0.88 + 0.99 \cdot 0.14 \\ &= 0.0088 + 0.1386 = 0.1474 \end{aligned}$$

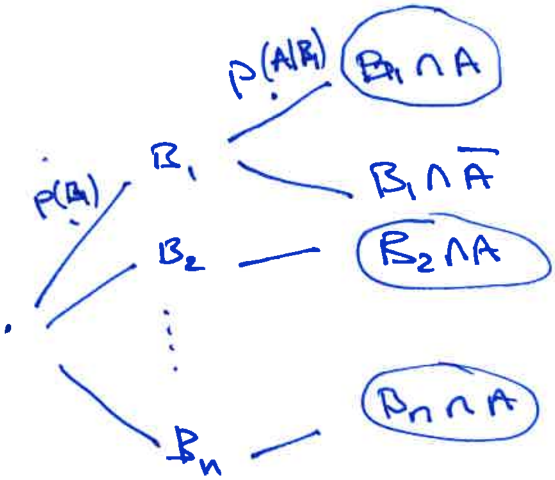
$$p(L|P) = \frac{0.0088}{0.1474} \simeq \underline{0.06} = 6\%$$

(Ved positivt utslag på detektoren, er det 6% sannsynlighet for løgn.)

Bayes' lov: $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = S$

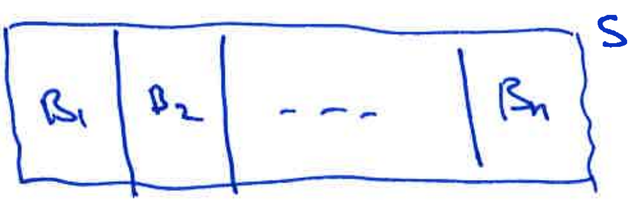
$B_1, B_2, \dots, B_n$ parvis disjunkte

$$p(B_1|A) = \frac{p(B_1 \cap A)}{p(A)} = \frac{p(B_1)\cdot p(A|B_1)}{p(B_1)\cdot p(A|B_1) + p(B_2)\cdot p(A|B_2) + \dots + p(B_n)\cdot p(A|B_n)}$$



$$\boxed{p(B_i|A) = \frac{p(B_i)\cdot p(A|B_i)}{p(B_1)\cdot p(A|B_1) + \dots + p(B_n)\cdot p(A|B_n)}}$$

Metode: finne $p(B_i|A)$ når vi vet $p(A|B_i)$



$p(A) =$
$p(A\cap B_1) + p(A\cap B_2) + \dots$
$\dots + p(A\cap B_n)$
(distributive lov)

$n=2$: $p(A) = p(A\cap S)$
$= p(A\cap(B_1\cup B_2)) = p((A\cap B_1)\cup(A\cap B_2))$
$= p(A\cap B_1) + p(A\cap B_2)$

Eks: B_1 : doper seg nå

B_2 : har dopet seg tidligere (men ikke nå)

B_3 : har aldri dopet seg

A : positiv doptest

Anta:

$p(B_1) = 0.02$

$p(B_2) = 0.14$

$p(B_3) = 0.84$

$p(A|B_1) = 0.80$

$p(A|B_2) = 0.06$

$p(A|B_3) = 0.03$

$p(B_3|A) \leftarrow$ sannsynlighet for positiv doptest om man aldri har dopet seg

Total sannsynlighet:

$$p(A) = p(A|B_1)\cdot p(B_1) + p(A|B_2)\cdot p(B_2) + p(A|B_3)\cdot p(B_3)$$
$$= 0.80\cdot 0.02 + 0.06\cdot 0.14 + 0.03\cdot 0.84$$
$$= 0.016 + 0.0084 + 0.0252$$
$$= \underline{0.0496}$$

Bayes' lov:

$$p(B_3|A) = \frac{p(A|B_3)\cdot p(B_3)}{p(A)} = \frac{0.03\cdot 0.84}{0.0496}$$

$$= \frac{0.0252}{0.0496} = \frac{63}{124} \simeq \underline{\underline{50.8\%}}$$

② Uavhengighet

A, B hendelser

Defn: $\boxed{\text{A og B er } \underline{\text{uavhengige}} \ \underline{\text{hendelser hvis}} \ p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B).}$

Eks: A: Summen er minst 10
Vi kaster to term. B: rød terning viser 5 eller 6

$$p(A) = \frac{6}{36} \qquad p(B) = \frac{12}{36}$$

$$p(A \cap B) = \frac{5}{36} \neq p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{12}^{2}}{36} = \frac{2}{36}$$

Hva betyr $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$?

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A) \cdot \cancel{p(B)}}{\cancel{p(B)}} = p(A)$$

antar uavhengighet

Oppsummert: A og B uavhengige $\Leftrightarrow$ $p(A|B) = p(A)$

Eks (terningkast): $p(A|B) = 5/12$
$p(A) = 6/36 = 2/12$

de Morgan's lov: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$$\boxed{\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}}$$