Plan

1. Stokastiske variabler
2. Diskrete stokastiske variabler
3. Forventningsverdi og varians
4. Binomisk og geometrisk fordeling

Repetisjon:

Stokastisk forsøk

$S = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$

$A \subseteq S \rightsquigarrow p(A)$

Betinget sannsynlighet:

$$p(A|B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}$$

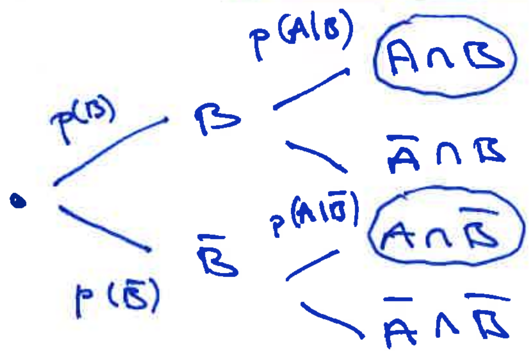
Sannsynlighet for A, gitt at B inntreffer

Bayes lov:

$$\boxed{p(B|A) = \frac{p(A|B)\cdot p(B)}{p(A)}}$$

$\leftarrow p(A\cap B)$

$\leftarrow \underbrace{p(A|B)\cdot p(B) + p(A|B^c)\cdot p(B^c)}_{\text{total sannsynlighet}}$



Uavhengighet:

A og B uavhengige $\iff p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B)$

$\Updownarrow$

$$\boxed{p(A|B) = p(A)}$$

Eivind Eriksen, Kontor B4-032, eivind.eriksen@bi.no
http://www.dr-eriksen.no/teaching/MET1190/

Oppgavearh 2:

5. $(x+y)^7 = \_\_\_ + c \cdot x^3 y^4 + \ldots$

$(x+y)(x+y)\ldots(x+y)$

$$c = \binom{7}{3} = \binom{7}{4} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5}{\cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}} = 35$$

$$(x+y)^7 = x^7 + \binom{7}{1}x^6 y + \binom{7}{2}x^5 y^2 + \ldots$$

6. d) $\binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1} = \binom{n}{r}$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

$$\binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1} = \frac{(n-1)!}{r!\,(n-1-r)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!}$$

$$= \frac{(n-1)! \cdot (n-r)}{r!\,(n-r-1)! \cdot (n-r)} + \frac{(n-1)! \cdot r}{(r-1)!\,(n-r)! \cdot r}$$

$$= \frac{(n-1)! \cdot (n-r) + (n-1)! \cdot r}{r!\,(n-r)!}$$

$$= \frac{n \cdot (n-1)!}{r!\,(n-r)!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

1 Stokastiske variabler

Eks: Vi kaster en terning

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$p(1) = p(2) = \dots = 1/6$

X = antall øyne på terningen

X	$p(X)$
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

Vi kaster to terninger:

$S = \{(1,1), (1,2), \dots, (6,6)\}$

$p(1,1) = \dots = 1/36$

X = summen av de to terningene

x	$p(X=x)$
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36

Forventningsverdi:

$$E(X) = 2 \cdot p(2) + 3 \cdot p(3) + 4 \cdot p(4) + \dots + 12 \cdot p(12)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + \dots = \underline{\underline{7}}$$

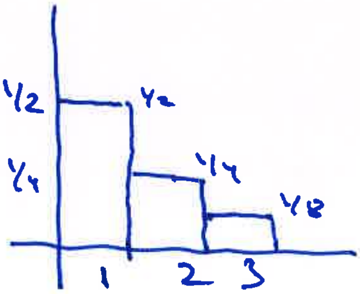
② Diskrete stokastiske variabler

- diskret stokastisk var.
- kontinuerlig —"—

Eks: X = antall øyne på en terning $X(S) = \{1,2,3,4,5,6\}$
endelig mengde
= diskret

X = antall kast før vi får K $X(S) = \{1,2,3,\ldots\}$
uendelig mengde,
diskret

$$p(X>3) = p(X=4) + p(X=5) + \ldots$$
$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$$



X = hvor lenge det er til det kommer snø. $X[S] = [0, \to)$

Defn: En stokastisk variabel X er en variabel som tar tallverdier som avhenger av utfallet i et stokastisk forsøk

Stokastisk forsøk

$S = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ $\quad \omega \rightsquigarrow X(\omega)$

utfallsrom

$X(S)$ = mengden av mulige X-verdier

X er diskret hvis mengden $X(S)$ er diskret

Anter nå at X er diskret:

Eks: Vi kaster to terninger
X = summen

$X(S) = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$ diskret

x	$p(x) = p(X=x)$	$F(x) = p(X \le x)$
2	1/36	1/36
3	2/36	3/36
4	3/36	6/36
5	⋮	⋮
6		
7		
8		
⋮		
12	1/36	
	1	

$p(2) = 1/36$

$p(X=2) = 1/36$

$p(x)$: fordelingsfunksjonen til X

$p(X \le 3) = 3/36 = F(3)$

kumulativ fordelingsfunksjon

$p(x)$: fordelingsfunksjonen til X $\qquad p(X=x)$

$F(x)$: kummulativ f.f. til X $\qquad p(X \leq x)$

3 Forventningsverdi og varians

Forventningsverdi: $\quad E =$ expectation

$$E(X) = x_1 \cdot p(x_1) + x_2 \cdot p(x_2) + \ldots + x_n \cdot p(x_n)$$

når $X(S) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

$$E(x) = x_1 \cdot p(x_1) + x_2 \cdot p(x_2) + \ldots$$

når $X(S) = \{x_1, x_2, \ldots\}$

Eks: Vi kaster mynt/kron to ganger

$X =$ antall K

$X(S) = \{0, 1, 2\}$

x	$p(x)$
0	1/4
1	1/2 = 2/4
2	1/4

$$E(x) = 0 \cdot p(0) + 1 \cdot p(1) + 2 \cdot p(2)$$
$$= 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \underline{\underline{1}}$$

1000:

$250 \times = 0$

$500 \times = 1$

$250 \times = 2$

$$\frac{\overbrace{0+0+\ldots+0}^{250} + \overbrace{1+1+\ldots+1}^{500} + \overbrace{2+\ldots+2}^{250}}{1000}$$

$$= \frac{250 \cdot 0}{1000} + \frac{500 \cdot 1}{1000} + \frac{250 \cdot 2}{1000}$$

$$= 1$$

Eks: Vi kaster mynt/kron én gang

$x = $ antall K

$x(S) = \{0, 1\}$ $\qquad E(x) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \underline{\underline{1/2}}$

Varians:

$$\text{Var}(x) = E[(X-\mu)^2]$$

$\mu = E(X)$

$Y = (X-\mu)^2$

Eks: Vi kaster M/K to ganger

$x = $ ant. K.

$E(x) = 1 \qquad \underline{\mu = 1} \qquad Y = (X-1)^2$

x	$Y = (x-1)^2$	$p(x)$
0	1	1/4
1	0	1/2
2	1	1/4

$E(Y) = 1 \cdot 1/4 + 0 \cdot 1/2 + 1 \cdot 1/4$

$= 1/4 + 1/4 = 2/4 = \underline{1/2}$

$\text{Var}(x) = \underline{\underline{1/2}}$

$E(X) = 1 \leftarrow$ gjennomsnitt

$\text{Var}(x) = 1/2 \leftarrow$ mål på variasjon

$\boxed{\textbf{Merk:} \quad \text{Var}(x) \geq 0}$

Defn: Standardavvik

$\sigma = \sqrt{\text{Var}(x)}$

$\sigma = \sqrt{\text{Var}(x)}$

Regneregler for forventning:

i) $E(aX+b) = aE(X)+b$ a, b konstanter

ii) $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$

Merk: $E(X^2) \neq E(X)^2$

$X(S)=\{x_1,x_2\}$: $E(X^2) = x_1^2 \cdot p(x_1) + x_2^2 \cdot p(x_2)$

$E(X)^2 = (x_1 \cdot p(x_1) + x_2 \cdot p(x_2))^2$

Merk: $E[g(X)] = g(x_1) \cdot p(x_1) + g(x_2) \cdot p(x_2) + \ldots$

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= E[(X-\mu)^2] \\
&= E[X^2 - 2\mu X + \mu^2] \\
&= E(X^2) - E(2\mu X) + E(\mu^2) \\
&= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \\
&= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\
&= E(X^2) - \mu^2
\end{aligned}
$$

$$\boxed{Var(X) = E(X^2) - E(X)^2}$$

Regneregler for varians:

i) $Var(X) \geq 0$ $\Longrightarrow$ $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$ std. avvik

ii) $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$

iii) $Var(aX+b) = a^2 \cdot Var(X)$ når a, b konst.

(4) Binomisk fordeling.

En stokastisk variabel X kalles binomisk fordelt med parametre n, p $\longrightarrow$ $\boxed{X \sim \text{Binom}(n,p)}$

huis:

i) Vi gjentar et forsøk n ganger

ii) Hver gange er det to mulige utfall $\{S, F\}$, og $p = p(S)$

iii) De ulike gjentagelsene er uavhengige av hverandre

$X =$ antall S

Eks: Vi kaster en terning 10 ganger

$X =$ antall 5'ere : $X \sim \text{Binom}(10, 1/6)$

$n = 10$

$S = \{5\}$

$p = 1/6$

$F = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

$q = 1 - p = 5/6$

x	p(x)
0	$(5/6)^{10}$
1	$10\,(1/6)\cdot(5/6)^9$
2	
3	
⋮	
10	

Formler: $E(X) = n \cdot p$

$= 10 \cdot 1/6 = 10/6 = 5/3 \simeq 1.67$

$Var(X) = n \cdot p\,(1-p) = npq$

$= 10 \cdot 1/6 \cdot 5/6 = 50/36$

Eks: $X \sim \text{Binom}(n=10, p=1/6)$

$$p(X=i) = \binom{10}{i} \cdot (1/6)^i \cdot (5/6)^{10-i} \quad , i=0,1,2,\ldots,10$$

Generelt: $X \sim \text{Binom}(n, p)$

$X(S) = \{0,1,2,\ldots,n\}$

$i=0,1,\ldots,n$: $\boxed{p(X=i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}}$

Eks: Vi tar en flervalgseksamen med 8 spm. og tre alternativ på hvert spm.

Vi velger tilfeldige svar.

X = antall riktige svar.

$X \sim \text{Binom}(n=8, p=1/3)$:

$$E(X) = n \cdot p = 8 \cdot 1/3 \approx 2{,}67$$

$$Var(X) = npq = 8 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{3} = 16/9$$

$$\sigma_X = \sqrt{16/9} = 4/3 \approx 1{,}33$$