Plan

1 Poisson-fordeling
2 Chebyshevs ulikhet
3 Tolkning av forventningsverdi og standardavvik

Repetisjon:

X : Stokastisk variabel

Stokastisk forsøk $\left\{ \begin{array}{l} S = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\} \\ p(\omega_1), \ldots, p(\omega_n) \end{array} \right.$

$X = X(\omega)$: Verdien til X avhenger av utfallet i det stokastiske forsøket

$p(x) = p(X = x)$: sannsynligheter

$X(S) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ (diskret)

Eks: Vi kaster en terning
X = antall øyne

x	p(x)
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

$$\boxed{E(X) = x_1 \cdot p(x_1) + x_2 \cdot p(x_2) + \ldots + x_n \cdot p(x_n)}$$
(forventningsverdi)

Vektet gjennomsnitt, dvs uten hensyn til hvor ofte de ulike verdiene forekommer

Eks: (terningkast)

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \underline{\underline{3.5}}$$

$$\mathrm{Var}(X) = E\left((X-\mu)^2\right), \quad \text{der} \quad \mu = E(X)$$

(varians)

$$= (x_1-\mu)^2 \cdot p(x_1) + (x_2-\mu)^2 \cdot p(x_2) + \dots$$

Eks: Terningkast

x	$p(x)$	$y=(x-\mu)^2=(x-3.5)^2$
1	1/6	$(-2.5)^2$
2	1/6	$(-1.5)^2$
3	1/6	$(-0.5)^2$
4	1/6	0.5^2
5	1/6	1.5^2
6	1/6	2.5^2

$E(X) = 3.5$

$\mu = 3.5$

$$\mathrm{Var}(X) = (-2.5)^2 \cdot \tfrac{1}{6} + (-1.5)^2 \cdot \tfrac{1}{6} + (-0.5)^2 \cdot 1/6 + 0.5^2 \cdot \tfrac{1}{6} + 1.5^2 \cdot \tfrac{1}{6} + 2.5^2 \cdot 1/6$$

$$= \tfrac{1}{6}\left(6.25 + 2.25 + 0.25 + 0.25 + 2.25 + 6.25\right)$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{17.5}{6} = \frac{35}{12} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{35}{12}}$$

Notasjon:

$\mu = \mu_X = E(X)$ "gjennomsnittsverdi"

$\sigma^2 = \sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X)$ "gjennomsnitt av kvadrat-avvik fra μ"

$\sigma = \sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ standard avvik til X

Regneregler:

i) $E(aX+b) = a \cdot E(X) + b$ — a, b konstanter

ii) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

iii) $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - \mu^2$

iv) $Var(aX+b) = a^2 \cdot Var(X)$

Eks: Terningkast

$$Var(X) = \underbrace{1^2 \cdot \tfrac{1}{6} + 2^2 \cdot \tfrac{1}{6} + \dots + 6^2 \cdot \tfrac{1}{6}}_{E(X^2)} - (3.5)^2 = \dots = \frac{35}{12}$$

Binomisk fordeling

$X \sim Binom(n,p)$: $X(S) = \{0,1,2,\dots,n\}$

$$p(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

Kjennetegn:
- Vi gjentar et forsøk n ganger
- To utfall $\{S, F\}$ med $p(S) = p$ og $p(F) = 1-p = q$
- Uavhengige forsøk

X = antall ganger S inntreffer

$E(X) = n \cdot p$

$Var(X) = n \cdot p \cdot q = np(1-p)$

E(X): X_1 = ant. ganger X slår til i første gjentagelse

X_2

X_3 = ant. ganger X slår til i tredje gjentagelse

$\vdots$

X_n

$E(X_1) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$

$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$
$= p + p + \dots + p = \underline{n \cdot p}$

① Poisson-fordeling

$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$:

Poissonfordeling med parameter $\lambda > 0$

$$X(S) = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$
$$p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

Kjennetegn:

- X = antall forekomster av en hendelse i et bestemt tidsintervall
- λ = forventet antall forekomster i det gitte tidsintervallet
- forekomster er forholdsvis sjeldne, og aldri samtidig

Formler:

$$p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$
$$E(X) = \lambda$$
$$Var(X) = \lambda$$

Eks:

X = antall mål et fotballag scorer i løpet av en kamp.

$$\lambda = \frac{60}{22} \simeq 2.7$$

(hvis laget har scoret 60 mål på 22 kamper)

$$p(X=1) = \frac{2.7^1}{1!} e^{-2.7} = 2.7 e^{-2.7} \simeq 0.18$$

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X=0) = 1 - \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = 1 - e^{-2.7} \simeq 0.93$$

Eks: Vi kaster en mynt til vi får kron.

X = antall kast

$$X(S) = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

x	$p(x)$
1	1/2
2	1/4
3	1/8
⋮	⋮

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + \frac{4}{16} \ldots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \ldots$$

$$+ \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$

$$+ \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$

$$+ \frac{1}{16}$$

$$= \ldots$$

Tilnærming:

Hvis $X \sim \text{Binom}(n,p)$ er binomisk fordelt med parametre n, p og

$$\begin{cases} n \text{ er stor} & (n > 10) \\ p \text{ er liten} & (p < 1/10) \end{cases}$$

da er X tilnærmet Poisson $(\lambda = n \cdot p)$.

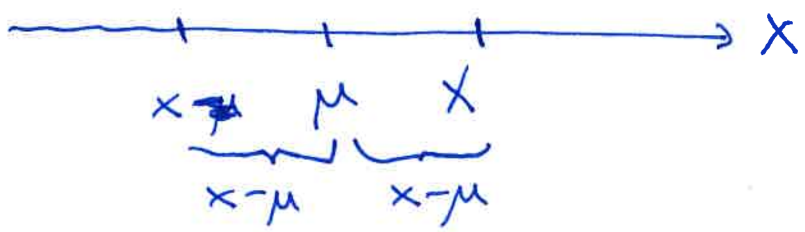
Forklaring: Hvis vi deler tidsperioden inn i mange (n) delperioder og vi antar at det maksimalt forekommer en gang per delperiode da er poisson = binomisk.

② Chebyshevs ulikhet:

Hvis X er en stokastisk variabel med $\mu = E(X)$ og $\sigma^2 = Var(X)$, da har vi:

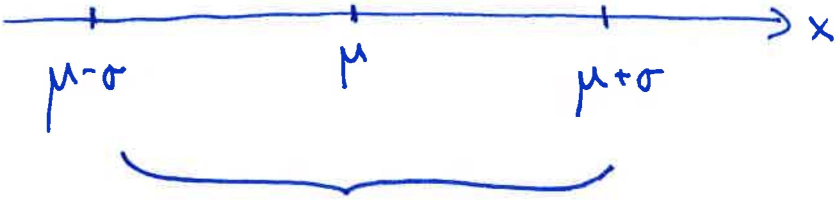
$$\boxed{P(|X-\mu| > k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}} \quad \text{for } k > 0$$

Merk: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{Var(X)}$ er standardavviket.



Eivind Eriksen, Kontor B4-032, eivind.eriksen@bi.no
http://www.dr-eriksen.no/teaching/MET1190/

k=1: $P(|X-\mu| > \sigma) \leftarrow$ VS i Chebyshevs ulikhet



$$(\mu-\sigma, \mu+\sigma)$$

$$\parallel$$

X ligger innenfor $\mu \pm 1$ std. avvik $\rightarrow$ $|X-\mu| < \sigma$

$|X-\mu| > \sigma \leftarrow$ X ligger mer enn 1 stdavvik fra μ

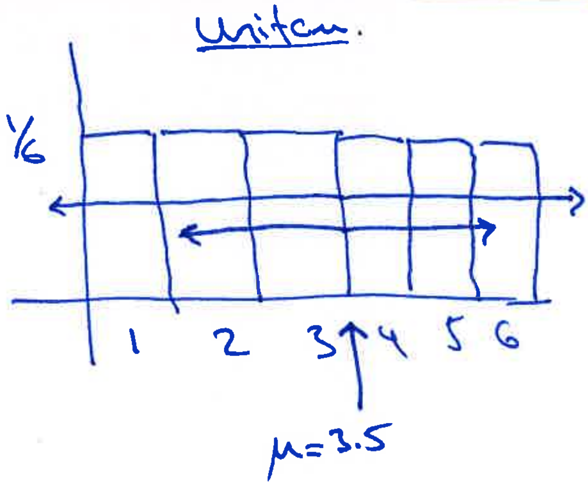
Chebyshevs ulikhet:

Sannsynligheten for at X ligger mer enn k std. avvik fra μ er alltid mindre enn eller lik $1/k^2$.

k=2: $P(|X-\mu| > 2\sigma) \leq \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0.25$

$P(|X-\mu| < 2\sigma) \geq 1 - \frac{1}{4} = 0.75$

$$\boxed{P(|X-\mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}}$$



Eks: Terningkast

X = antall øyne

$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5$

$\mu = 3.5$

$Var(X) = \left(1^2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 6^2 \cdot \frac{1}{6}\right) - 3.5^2$

$\simeq 2.917 \quad \left(\frac{35}{12}\right)$

$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{35/12} \simeq \sqrt{2.917}$

$\simeq 1.71$

Innenfor $\pm 1\sigma$: $(3.5 - 1.71, 3.5 + 1.71)$

$= (1.79, 5.21)$

$|X - \mu| < \sigma$:

$\{2, 3, 4, 5\}$

$P(|X - \mu| < \sigma)$

$= 2/3$

Innenfor $\pm 2\sigma$: $(3.5 - 2 \cdot 1.71, 3.5 + 2 \cdot 1.71)$

$= (0.08, 6.92)$

$|X - \mu| \leq 2\sigma$

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$P(|X - \mu| < 2\sigma)$

$= 1$

Eks:

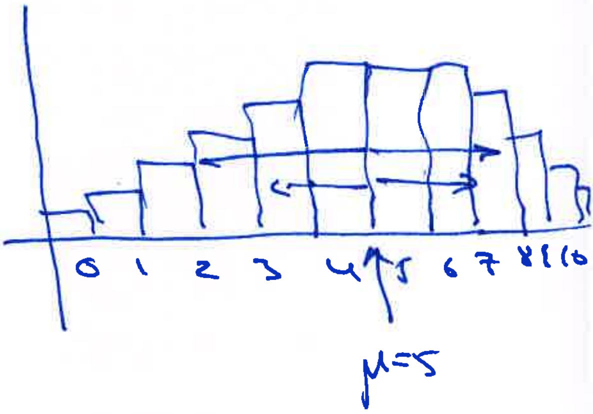
$X \sim \text{Binom}(n=10, p=\frac{1}{2})$

$\mu = E(X) = np = 10 \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{5}}$

$Var(X) = n \cdot p \cdot (1-p) = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2.5$

$\sigma = \sqrt{2.5} \simeq 1.58$



$\underline{\mu \pm 1 \cdot \sigma}$: $(5-1.58, 5+1.58)$

$= (3.42, 6.58) = \{4, 5, 6\}$

$\underline{\mu \pm 2\sigma}$: $(5 - 2 \cdot 1.58, 5 + 2 \cdot 1.58)$

$= (1.84, 8.158) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$p(2 \leq X \leq 8)$

$= 1 - (p(0) + p(1) + p(9) + p(10))$

$= 1 - 0.021 \simeq \underline{\underline{0.98}}$

$p(-2 \leq Z \leq 2)$

$p(0) = (1/2)^{10}$

$\simeq \underline{0.00098}$

$p(1) = \binom{10}{1} (1/2)^1 \cdot (1/2)^9$

$= 10 \cdot (1/2)^{10}$

$\simeq 0.0098$

$p(9) = \binom{10}{9} (1/2)^9 \cdot (1/2)^1$

$= 10 \cdot (1/2)^{10}$

Z-verdier: (standardisering)

X stokastisk variabel

$\mu = E(X)$

$\sigma = \sqrt{Var(X)}$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$Z = 1$: 1 std over μ

$Z = -1$: 1 std under μ

$Z = 0$: μ

$\boxed{\begin{array}{l}\underline{\text{Chebyshevs ulikhet:}} \\ P(|Z| \geq k) \leq 1/k^2 \qquad (k>0)\end{array}}$

$\underline{k=2:}$ $P(|Z| \geq 2) \leq 1/4$

$\Updownarrow$

$P(-2 < Z < 2) \geq 3/4$