

Veiledningsoppgaver

Oppgave 1.

	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 1$	$p(1,1) = 0.4$	$p(1,2) = 0.3$
$X = 2$	$p(2,1) = 0.2$	$p(2,2) = 0.1$

To stokastiske variabler X og Y er simultant fordelt med mulige verdier $X(S) = Y(S) = \{1,2\}$, og sannsynlighetsfordelingen er gitt ved tabellen ovenfor. Finn de marginale fordelingene til X og Y , og regn ut:

- | | | | |
|------------|--------------------|----------------------|--------------------|
| a) $E(X)$ | b) $\text{Var}(X)$ | c) $E(Y)$ | d) $\text{Var}(Y)$ |
| e) $E(XY)$ | f) $E(X)E(Y)$ | g) $\text{Cov}(X,Y)$ | h) $\rho(X,Y)$ |

Oppgave 2.

Vi kaster to terninger, og lar X være det største og Y det minste av de to terningkastene. Lag en tabell som viser den simultane fordelingsfunksjonen $p(x,y)$ og de marginale fordelingsfunksjonene, og regn ut:

- | | | | |
|------------|--------------------|---------------------|----------------------|
| a) $E(X)$ | b) $\text{Var}(X)$ | c) $E(Y)$ | d) $\text{Var}(Y)$ |
| e) $E(XY)$ | f) $E(X)E(Y)$ | g) $p(X = 4 Y = 1)$ | h) $\text{Cov}(X,Y)$ |

Oppgave 3.

	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$
$X = 1$	$p(1,1) = 0.1$	$p(1,2) = a$	$p(1,3) = 0.2$
$X = 2$	$p(2,1) = b$	$p(2,2) = 0.1$	$p(2,3) = 0.3$

To stokastiske variabler X og Y er simultant fordelt med mulige verdier $X(S) = \{1,2\}$ og $Y(S) = \{1,2,3\}$, og sannsynlighetsfordelingen er gitt ved tabellen ovenfor. Forklar at $b = 0.3 - a$. Finn de marginale fordelingene til X og Y , og regn ut:

- | | | | |
|------------|--------------------|---------------------|----------------------|
| a) $E(X)$ | b) $\text{Var}(X)$ | c) $E(Y)$ | d) $\text{Var}(Y)$ |
| e) $E(XY)$ | f) $E(X)E(Y)$ | g) $p(Y = 2 X = 1)$ | h) $\text{Cov}(X,Y)$ |

Oppgave 4.

Vi ser på de stokastiske variablene i Oppgave 3. Vis at det fins kun en verdi av a slik at $\text{Cov}(X,Y) = 0$, og finn denne verdien. Undersøk så om X og Y er uavhengige for denne verdien av a .

Oppgave 5.

La R_1 og R_2 være avkastningen til to verdipapirer, der avkastningen er regnet som andel av investert beløp (for eksempel svarer $R_1 = 0.30$ til at prisen på det første papiret øker med 30%). Vi antar at forventet avkastning er $\mu(R_1) = 1$ og $\mu(R_2) = 0.80$, at standardavvikene er $\sigma(R_1) = 0.10$ og $\sigma(R_2) = 0.12$, og at korrelasjonen mellom avkastningene er $\rho(R_1, R_2) = -0.80$.

- Hvis du var begrenset til å investere i kun ett av papirene, hvilket ville du velge? Hvorfor?
- Anta at du investerer 50% i hvert av papirene. Hva er forventet avkastning, og hva er standardavviket?
- Anta at du investerer 80% i det første og 20% i det andre papiret. Hva er forventet avkastning, og hva er standardavviket?
- La a være andelen du investerer i det første papiret, og $(1 - a)$ andelen i det andre papiret. Uttrykk forventet avkastning og standardavvik ved a for alle mulige verdier av a med $0 \leq a \leq 1$.

Oppgave 6.

Bestem $E(aX + bY)$ og $\text{Var}(aX + bY)$ når X og Y er simultant fordelte stokastiske variabler og a, b er konstanter. Hva kan du si om disse uttrykkene dersom X og Y er uavhengige?

Oppgave 7.

Anta at X_1, X_2, X_3, X_4 er uavhengige stokastiske variabler med $E(X_i) = \mu$ og $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$ for alle i . Finn $E(X)$ og standardavviket σ_X til X når

- a) $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ b) $X = \frac{1}{4}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$ c) $X = \frac{1}{8}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{8}X_3 + \frac{1}{2}X_4$

Oppgave 8.

Oppgaver fra læreboken [L]: 4.19, 4.21, 4.22, 4.25, 4.27

Svar på veiledningsoppgaver

Oppgave 1.

- a) 1.3 b) 0.21 c) 1.4 d) 0.24 e) 1.8 f) 1.82 g) -0.02 h) ≈ -0.089

Oppgave 2.

- a) ≈ 4.47 b) ≈ 1.97 c) ≈ 2.53 d) ≈ 1.97 e) 12.25 f) ≈ 11.30 g) 2/11 h) ≈ 0.95

Oppgave 3.

- a) $1.7 - a$ b) $0.21 + 0.4a - a^2$ c) $2.1 + a$ d) $0.89 - 1.2a - a^2$
e) 3.5 f) $3.57 - 0.4a - a^2$ g) $a/(a + 0.3)$ h) $a^2 + 0.4a - 0.07$

Oppgave 4.

$a = \sqrt{0.11} - 0.2 \approx 0.13$; X og Y er ikke uavhengige

Oppgave 5.

- a) Det første (størst forventet avkastning og minst svingninger) b) $E(R) = 0.90, \sigma_R \approx 0.036$
c) $E(R) = 0.96, \sigma_R \approx 0.062$ d) $E(R) = 0.8 + 0.2a, \sigma_R = \sqrt{0.0436a^2 - 0.048a + 0.0144}$

Oppgave 7.

- a) $E(X) = 4\mu, \sigma_X = 2\sigma$ b) $E(X) = \mu, \sigma_X = \sigma/2$ c) $E(X) = \mu, \sigma_X = \sqrt{22}\sigma/8$