Løsning, Eksamen MET1190 06/2018

1.

a) Observasjonene ordnet i voksende rekkefølge:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x_i	2	4	4	4	5	7	8	9	10	12	13	14	16	20	21

Gj.snitt: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 9.93$ (Kalle.)

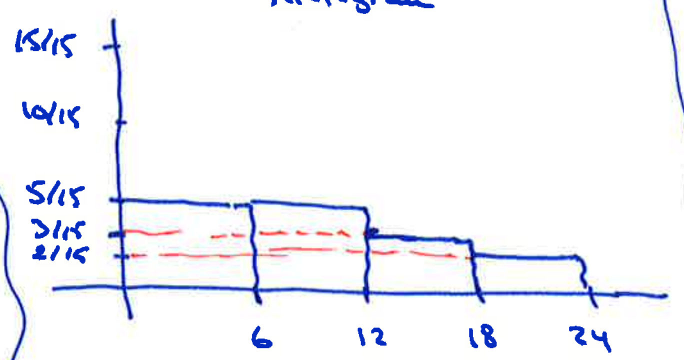
Median: 9 (observasjon nr 8 i voksende rekkefølge)

Modus: 4 (størst frekvens)

b) Frekvenstabell:

	Antall	Frekvens
1-6	5	5/15
7-12	5	5/15
13-18	3	3/15
19-24	2	2/15
	15	

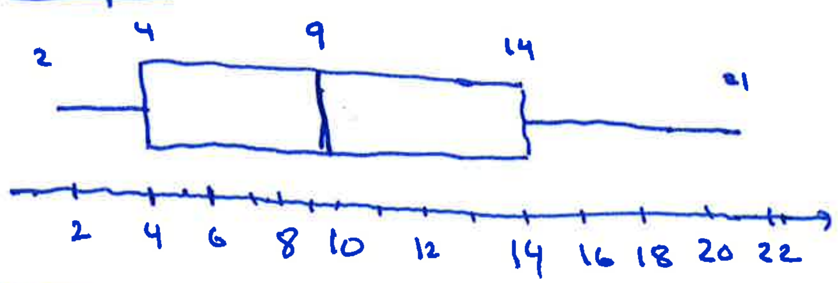
Histogram



Nedre kvartil: 4 (observasjon nr. 4 og 12 i voksende rekkefølge)

Øvrekvartil: 14

Boksplott:



c) Variasjonsbredde: $21-2=\underline{19}$

Std. avvik: $s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} = \underline{\underline{5.96}}$ (kalk.)

Varians: $s^2 = \underline{\underline{35.50}}$

Variasjonskoeffisient: $s/\bar{x} = \underline{\underline{60\%}}$

Tolkning:

i) Std. avvik: Typisk avvik fra gj.snitt er $\underline{\underline{5.96}}$

ii) Var. koeff: Typisk relativt avvik fra gj.snitt er $\underline{\underline{60\%}}$ (dvs 60% av gj.snitt.)

d) Chebyshev's ulikhet:

Minst 75% av observasjonene ligger innenfor $\underline{\bar{x} \pm 2s}$, i dette tilfellet mellom $\bar{x}-2s \simeq -2$ og $\bar{x}+2s \simeq 22$.

<u>Alle observasjonene ligger innenfor dette intervallet i utvalget</u>

(Chebyshevs ulikhet: $P(|X-\mu|>k\sigma) \le 1/k^2$, som med $k=2$ og empirisk fordelingsfunksjon gir resultatet ovenfor).

e)

x_i	y_i
4	2
12	1
5	4
2	3
20	2
21	0
4	4

$n=7$

Kovarians:

$s_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) = \underline{\underline{-8.90}}$ (kalk.)

(med $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum x_i = \underline{9.71}$ og $\bar{y}=\frac{1}{n}\sum y_i = \underline{2.29}$)

Korrelasjonskoeffisient:

$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \underline{\underline{-0.743}}$ (kalk.)

(med $s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum(x_i-\bar{x})^2} = \underline{8.01}$ og

$s_y = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum(y_i-\bar{y})^2} = \underline{1.50}$)

Tolkning: Nokså sterk negativ sammenheng mellom antall abonnement solgt og kaffekopper drukket siden $r<0$ og $|r|$ er nokså nær 1; dvs: <u>de som selger flest abonnement drikker minst kaffe</u>

2.

Utfallsrom:

a) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{3, 4, 5, 6\}$

$B = \{1, 3, 5\}$

$A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6\}$

$A \cap B = \{3, 5\}$

$p(A \cup B) = \underline{\underline{5/6}}$

$p(A \cap B) = 2/6 = \underline{\underline{1/3}}$

b) $p(\text{tre seksere}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{216}}}$ (bruker uavhengighet og at $p(\text{sekser}) = 1/6$)

$p(\text{minst en sekser}) = 1 - p(\text{ingen sekser})$

$= 1 - 5/6 \cdot 5/6 \cdot 5/6$

$= 1 - \frac{125}{216} = \underline{\underline{\frac{91}{216}}}$ (bruker uavhengighet og at $p(\text{ikke sekser}) = 5/6$)

c) X: binomisk med $p = 1/6$ og $n = 7$

$p(X=x) = \binom{7}{x} \cdot (1/6)^x \cdot (5/6)^{7-x}$ for $x = 0, 1, 2, \ldots, 7$, som gir

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(x)$	0.28	0.39	0.23	0.08	0.016	0.002	0.0001	0.000004

Forventning:

$E(X) = np = 7 \cdot 1/6 = \underline{\underline{7/6}}$

Varians:

$Var(X) = npq = 7 \cdot 1/6 \cdot 5/6 = \underline{\underline{35/36}}$

d) Antall hender: $\binom{52}{13} = \underline{\underline{6.35 \cdot 10^{11}}}$

Antall hender uten sparkort: $\binom{39}{13} = \underline{\underline{8.12 \cdot 10^{9}}}$

$p(\text{hånd uten sparkort}) = \frac{\binom{39}{13}}{\binom{52}{13}} \simeq \underline{\underline{0.013}}$

e) Det er 39 kort som fordeles blant tre andre spillere, hvorav 5 sparkort:

Gitt vår hånd:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Mulige hender: } \binom{39}{13} \simeq 8.12 \cdot 10^9 \\ \text{Hender uten sparkort: } \binom{34}{13} \simeq 9.28 \cdot 10^8 \end{array} \right.$

$p(\text{ingen sparkort}) = \frac{\binom{34}{13}}{\binom{39}{13}} \simeq \underline{\underline{0.114}}$

3. a) p = populasjonsandel som stemmer (Sp).

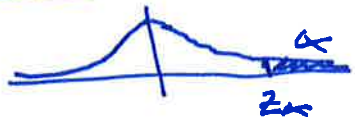
$$\boxed{\begin{array}{l} H_0:\ p \leq 0.10 \\ H_1:\ p > 0.10 \end{array}} \qquad (p_0 = 0.10)$$

hypoteser

Testobservator:

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$$

Høyresidig test:



Forkastningsområde:

$$\boxed{Z > z_\alpha}$$

b) $$Z = \frac{101 - 802 \cdot 0.10}{\sqrt{802 \cdot 0.10 \cdot 0.90}} = 2.45 > z_\alpha$$

Kritisk verdi

$z_\alpha = 1.645$

når $\alpha = 0{,}05$.

Vi forkaster H_0

Forkastningsområdet kan også skrives:

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} > z_\alpha = 1{,}645$$

$$\Updownarrow$$

$$\hat{p} - p_0 > z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} = 1.645 \cdot \sqrt{\frac{0.10 \cdot 0.90}{802}} = 0.0174$$

$$\hat{p} > p_0 + z_\alpha \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} = 0.10 + 0.0174 = 0.117$$

$$\boxed{\hat{p} > 0.117}$$

Siden $\hat{p} = \frac{101}{802} = 0.126 > 0.117$,
forkaster vi H_0.

c) P-verdi: p = sannsynlighet for minst like ekstrem verdi som den observerte

$$= P(Z \geq 2.45) = 1 - G(2.45) = 0.007 = 0.7\%$$

d) <u>Konfidensintervall:</u> (signifikansnivå α)

Intervall $[A, B]$ der A og B er stokastiske variabler,

slik at $p(A \leq p \leq B) = 1 - \alpha$

<u>$\alpha = 0.10$:</u> $p = \hat{p} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

$= 0.126 \pm 1.645 \cdot 0.0117$

$= 0.126 \pm 0.019$

siden $n\hat{p}(1-\hat{p}) \geq 5$ er X tilnærmet normalfordelt

<u>Intervall:</u> $\underline{\underline{[0.107, 0.145]}}$

e) <u>$\alpha = 0.10$:</u> $[0.107, 0.145]$ (se d)

<u>$\alpha = 0.05$:</u> $z_{\alpha/2} = 1.96 \Rightarrow \hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

$\underline{\underline{[0.103, 0.149]}}$

<u>$\alpha = 0.01$:</u> $z_{\alpha/2} = 2.576 \Rightarrow \hat{p} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

$\underline{\underline{[0.096, 0.156]}}$

Det siste intervallet skal ha størst sannsynlighet for å inneholde p (99%), og har derfor <u>størst</u> bredde.

4.

a) $\bar{x} = \frac{1}{12}(x_1 + x_2 + \dots + x_{12})$ $\qquad$ $\bar{x}_p = \frac{1}{6}(x_2 + x_4 + \dots + x_{12})$

$E(\bar{x}) = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} E(x_i) = \frac{1}{12} \cdot 12\mu = \underline{\underline{\mu}}$ $\qquad$ $E(\bar{x}_p) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} E(x_{2i}) = \frac{1}{6} \cdot 6\mu = \underline{\underline{\mu}}$

$Var(\bar{x}) = Var\left(\frac{1}{12}\sum x_i\right) = \frac{1}{12^2} \cdot 12 Var(x_i)$ $\qquad$ $Var(\bar{x}_p) = \frac{1}{6^2} \cdot 6\sigma^2 = \frac{1}{6}\sigma^2$

$= \frac{1}{12}\sigma^2$

$SE(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{12}} = \underline{\underline{\frac{\sigma}{\sqrt{12}}}}$ $\qquad$ $SE(\bar{x}_p) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{6}} = \underline{\underline{\frac{\sigma}{\sqrt{6}}}}$

Begge er forventningsrette, mens $\bar{X}$ har minst standardfeil.
Vi <u>foretrekker $\bar{X}$</u>.

b) $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{12}} = Z \sim N(0,1)$ $\qquad$ <u>Std. normalfordelt</u> (eksakt)

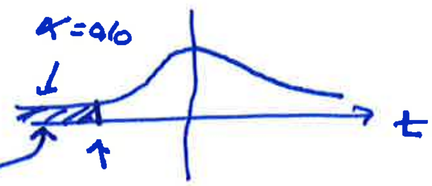
$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{12}} = T$ $\qquad$ <u>t-fordelt med $n-1=11$ frihetsgrader</u> (eksakt)

Fordelen med T er at den kan brukes selv når <u>σ er ukjent</u>.

c) $H_0: \mu \geq 1 = \mu_0$ $\qquad$ μ = forventning i populasjon

$H_1: \mu < 1 = \mu_0$

(venstresidig t-test) $\qquad$ $\underline{\alpha = 0.10}$



$t_{1-\alpha} = -t_\alpha$

$= -1.363$

$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{0.3 - 1}{1.1/\sqrt{12}}$

$= -2.20$

Forkastningsområde:

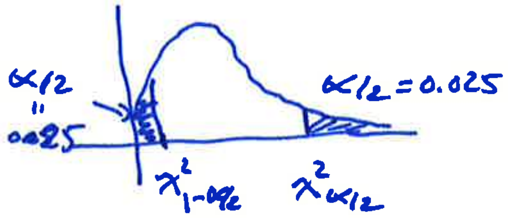
$T \leq -1.363$

<u>Vi forkaster H_0</u> : $\mu < 1$

<u>pverdi</u>: $p(T \leq -2.20) = 0.025 = \underline{2,5\%}$ $\qquad$ (Kalk.)

(som forventet er $p < \alpha$

d) Konfidensintervall for σ^2: $\alpha = 0.05$



$$\left[\frac{S^2 \cdot (n-1)}{\chi^2_{\alpha/2}} , \frac{S^2 (n-1)}{\chi^2_{1-\alpha/2}} \right]$$

$S^2 = 1.1^2 = 1.21$

Tabell: $\chi^2_{\alpha/2} = 21.92$

(n-1 = 11 frihetsgr.) $\chi^2_{1-\alpha/2} = 3.82$

$$\Downarrow$$

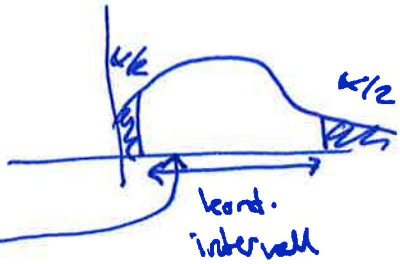
$$\left[\frac{1.21 \cdot 11}{21.92} , \frac{1.21 \cdot 11}{3.82} \right]$$

$= [0.61, 3.48]$ ← 90% sannsynlig at σ^2 er i dette intervallet

e) $H_0: \sigma = 1$ σ: std. avvik

$H_1: \sigma \neq 1$ $\alpha = 0.05$

(tosidig test)



(svarer til:

$H_0: \sigma^2 = 1$

$H_1: \sigma^2 \neq 1$)

Forkastningsområde: utenfor konfidensintervall

$[0.61, 3.48]$

$\sigma = 1$ er innenfor konfidensintervall, dvs utenfor forkastningsområdet

$\Downarrow$

Vi forkaster ikke H_0, men beholder H_0

Konklusjon: Vi beholder H_0: $\sigma = 1$