FORELESNING 11

MET 3431

STATISTIKK

EIVIND ERIKSEN

MAR 01 2012

PLAN:

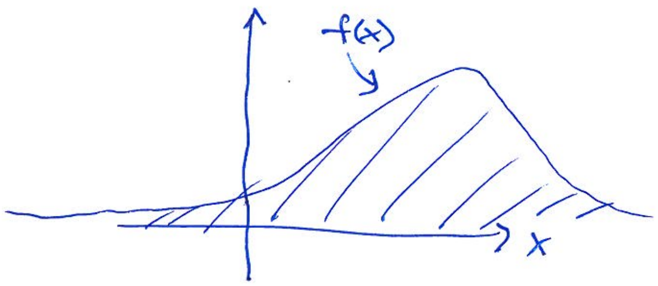
* NORMALFORDELING
* ANVENDELSER AV NORMALFORDELING

Repetisjon: X kontinuerlig fordelt tilfeldig variabel

kontinuerlig = kontinuerlig spektrum av mulige verdier

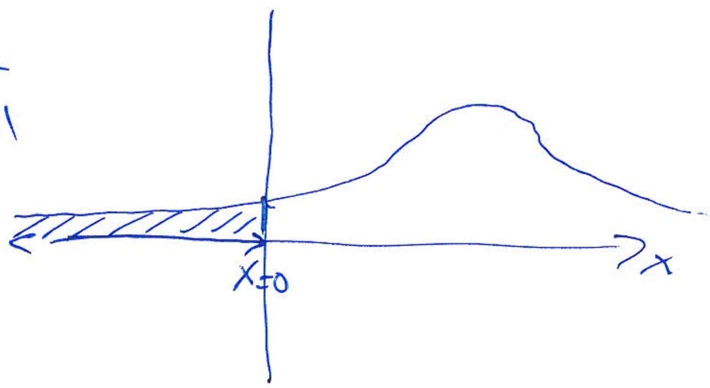
a) Sannsynlighetstetthet:

* $f(x) \geq 0$
* totalt areal under grafen $= 1$



b) Sannsynligheter:

$P(X \leq 0)$ = arealet under grafen opptil $x = 0$



Normalfordeling:

klokkeformet
Symmetrisk

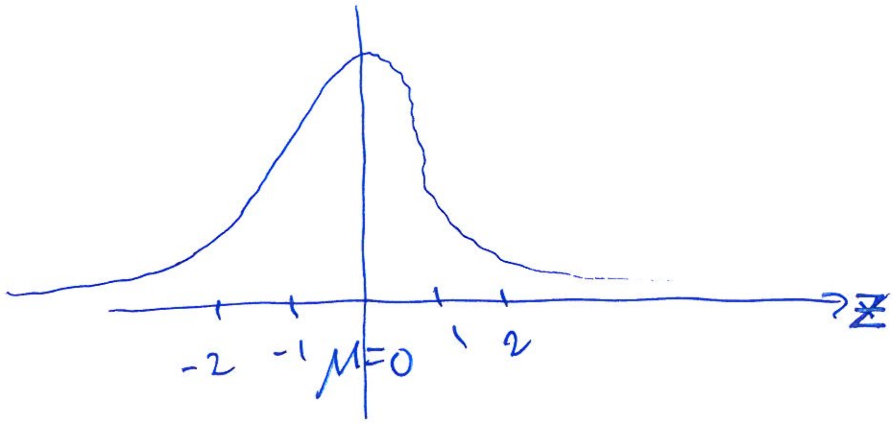
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

μ = gjennomsnitt

σ = standardavvik

Standard normalfordeling: Z er $N(0,1)$

* normalfordeling med $\mu = 0$ og $\sigma = 1$



Termometer- eksempel 1

Example

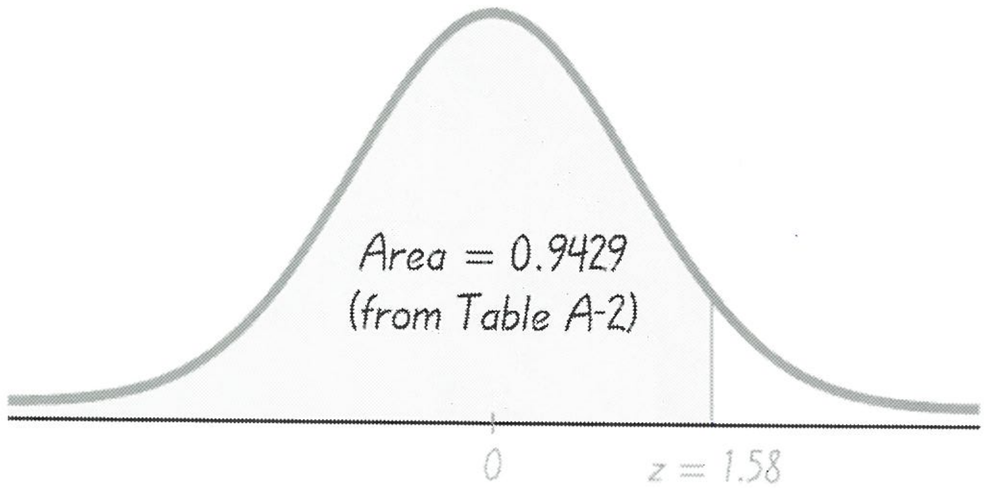
Du produserer termometere. Termometrene viser litt forskjellige temperaturer pga. tilfeldig variasjon. Ved 0°C:

- Gjennomnsittlig viser termometrene $\mu = 0°C$
- Standardavviket er $\sigma = 1°C$

Hva er sannsynligheten for at et tilfeldig valgt termometer viser mindre enn 1.58°C når temperaturen faktisk er 0°C?

Z = vist temp. i °C. til tilfeldig termometer

Hvis Z er std. normalfordelt, hva $P(Z \leq 1.58)$?



Svar:

Tabell A-2 gir at sannsynligheten er 0.9429

Termometer- eksempel 2

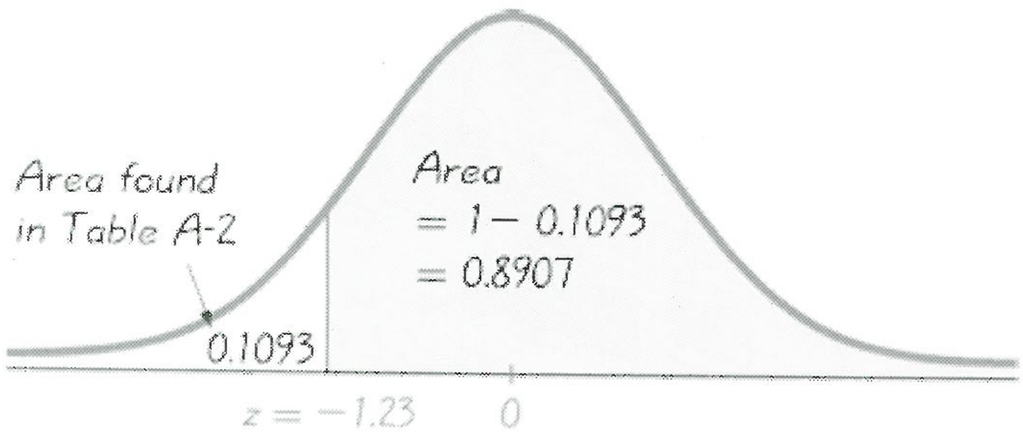
Example

Ved 0°C:

- Gjennomnsittlig viser termometrene $\mu = 0°C$
- Standardavviket er $\sigma = 1°C$

Hva er sannsynligheten for at et tilfeldig valgt termometer viser mer enn $-1.23°C$ når temperaturen faktisk er 0°C?

P (z > –1.23) = 0.8907



Svar:

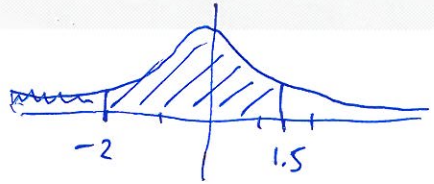
89.07 % av termometrene viser mer enn $-1.23°C$ ved 0°C

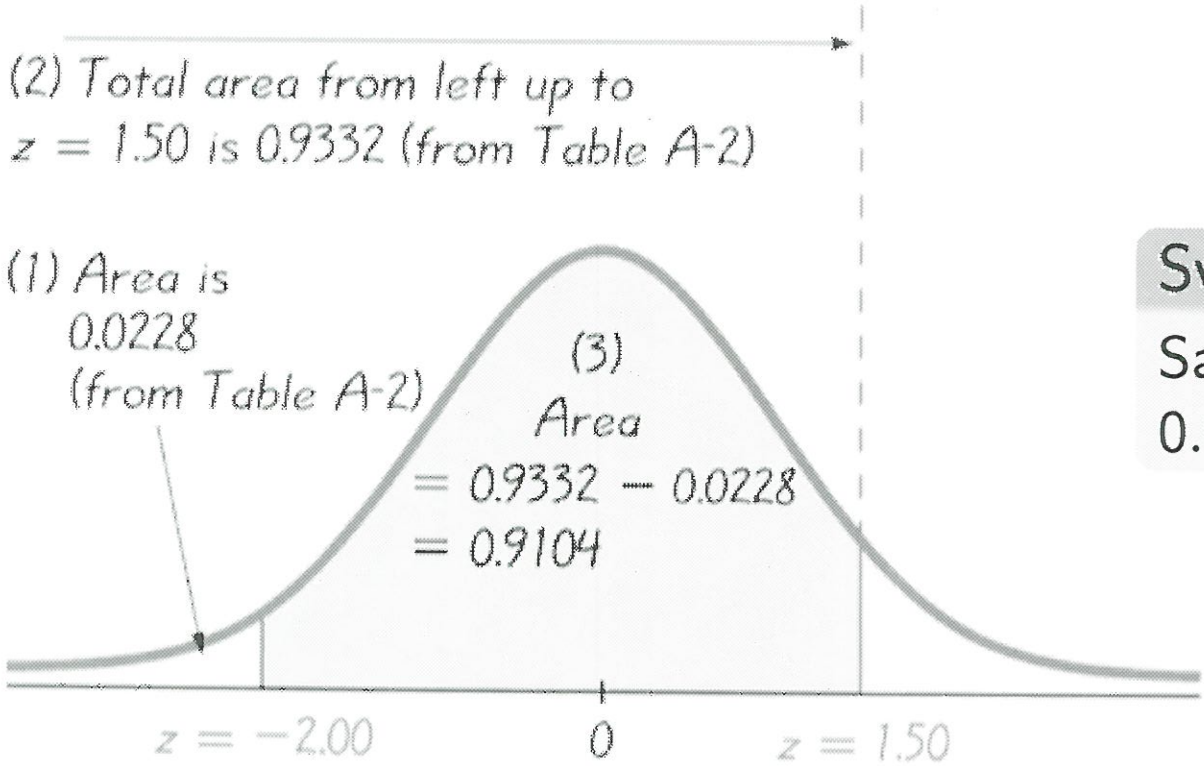
Termometer- eksempel 3

Example

Et termometer velges tilfeldig. Hva er sannsynligheten for at det viser mellom −2.00°C og 1.50°C?

$p(-2 \leq z \leq 1.5) = p(z \leq 1.5) - p(z \leq -2)$





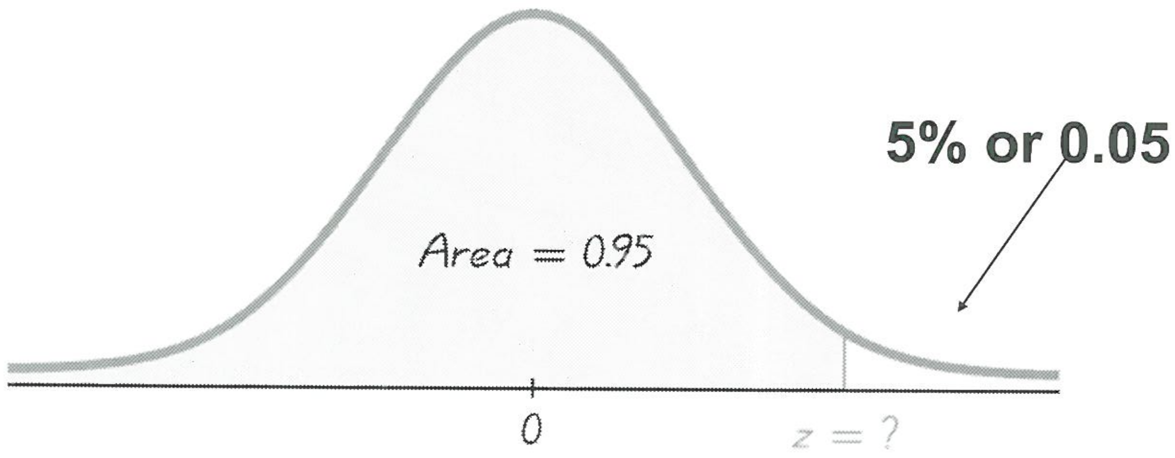
Svar:

Sannsynligheten er 0.9104

Finne z-verdien

Finne z-verdi som passer til en sannsynlighet

Vi snur problemet på hodet: Hvilken z-verdi gjør at arealet/sannsynligheten til høyre er 0.05?



Svar:

$z = 1.645$

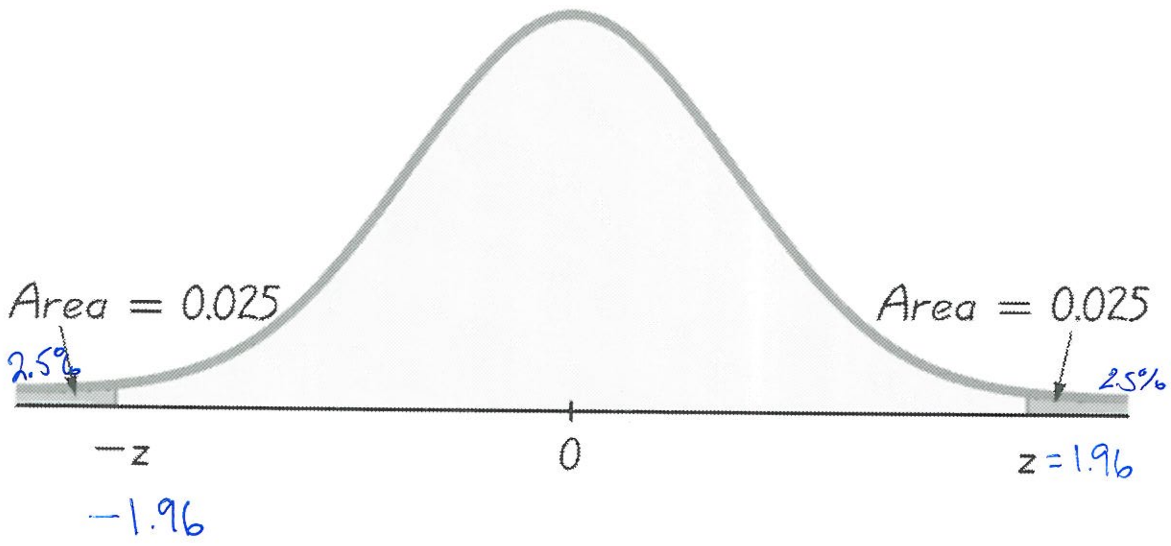
(z verdien blir positiv)

Finne z-verdien

Finne z-verdi som passer til en sannsynlighet

Hvilke z-verdier gjør at 95% av arealet ligger mellom dem?

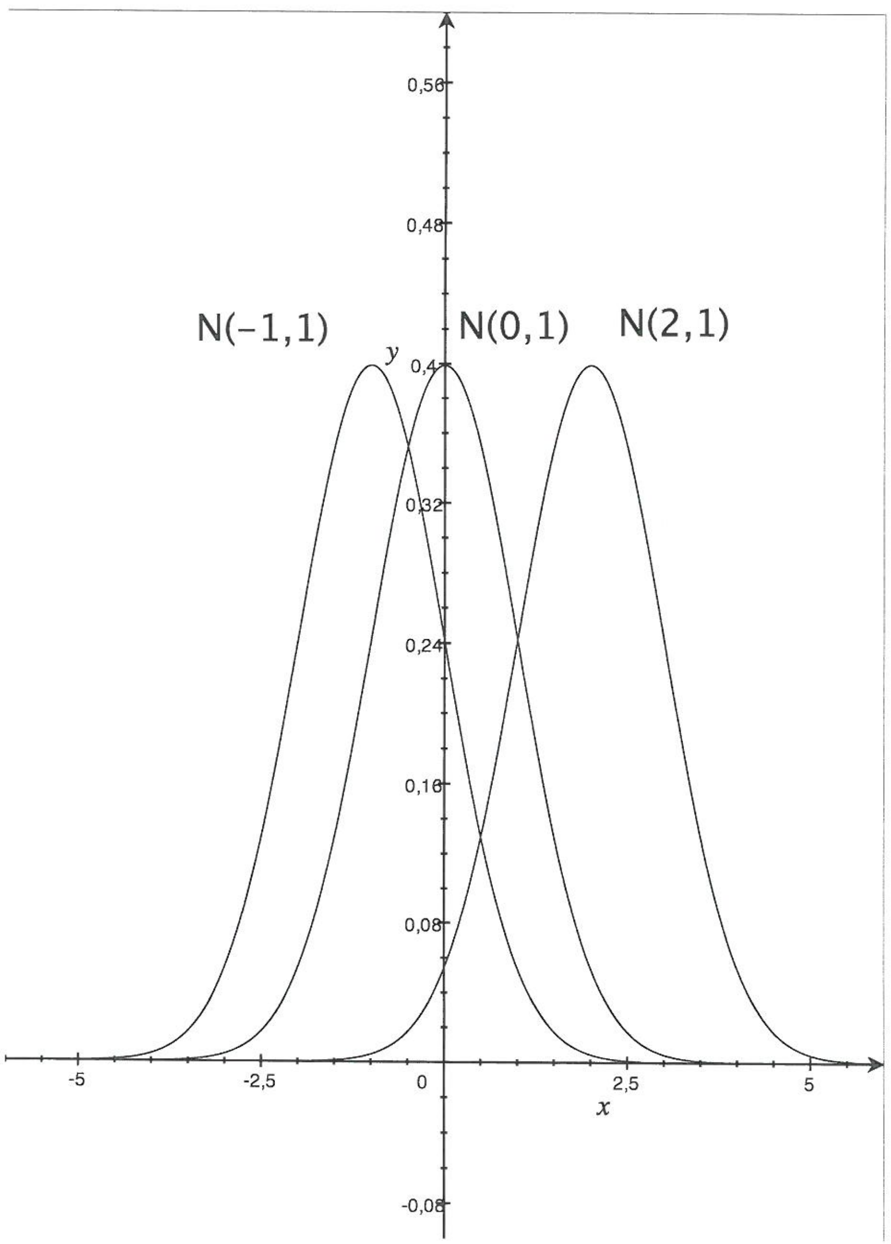
$p(z \leq 1.96) = 0.975$



Svar:

$z = \pm 1.96$

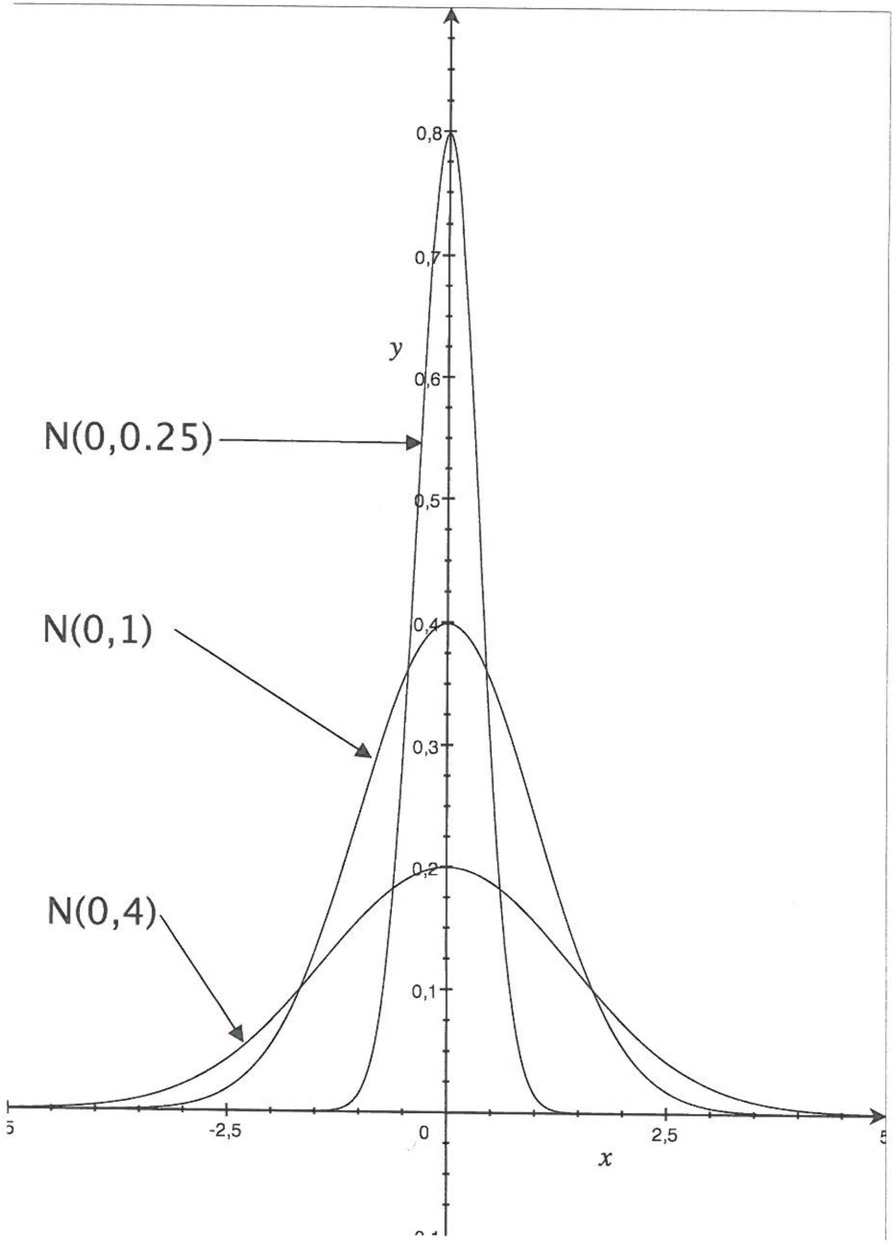
Samme varians $\sigma^2 = 1$



$N(\mu, \sigma)$
normalfordeling
gjennomsnitt $= \mu$
std. avvik $= \sigma$

1. $x \sim N(0, 1)$
2. $x \sim N(2, 1)$
3. $x \sim N(-1, 1)$

Samme μ, men forskjellig varians σ^2



1. $x \sim N(0, 1)$
2. $x \sim N(0, 4)$
3. $x \sim N(0, 0.25)$

Mange typer normalfordelinger

Normalfordelinger

- Standard normalfordelingen er bare ett eksempel på normalfordeling, $N(0, 1)$
- For hver μ-verdi og σ-verdi så finnes det en egen normalfordeling, $N(\mu, \sigma)$

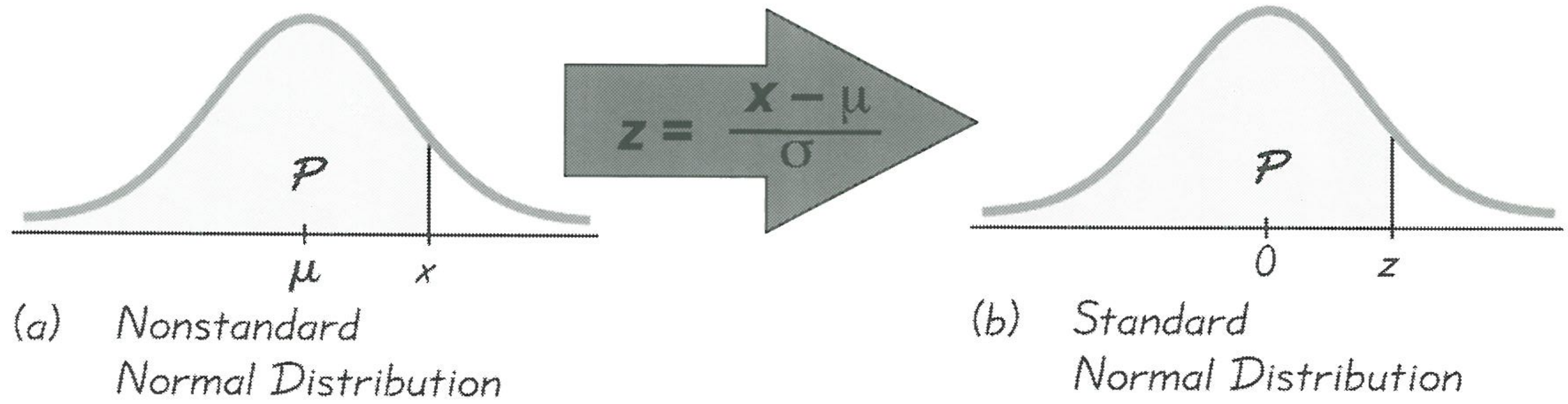
Omregne til z

Hovedpoenget er at vi kan standardiser enhver normalfordelt verdi til en *standard* normalfordelt z-verdi, og så bruke tabell A-2:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

X er $N(\mu, \sigma)$ $\Longrightarrow$ $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ er $N(0, 1)$

Omregne til standard normalfordeling



Figur: Omregne en x-verdi til en z-verdi

Å regne ut z-verdien

Enhver normalfordelt variabel kan standardiseres

- Anta at x er normalfordelt med $\mu = 45$ og $\sigma = 3$
- En x-verdien lik 39 vil ha standardisert z-verdi

$$z = \frac{39 - 45}{3} = -2$$

- Alle normalfordelte variabler x kan standardiseres til z
- Dermed trenger vi bare sannsynlighetstabeller for z! (tabell A-2)

Vekteksempel 1

Example

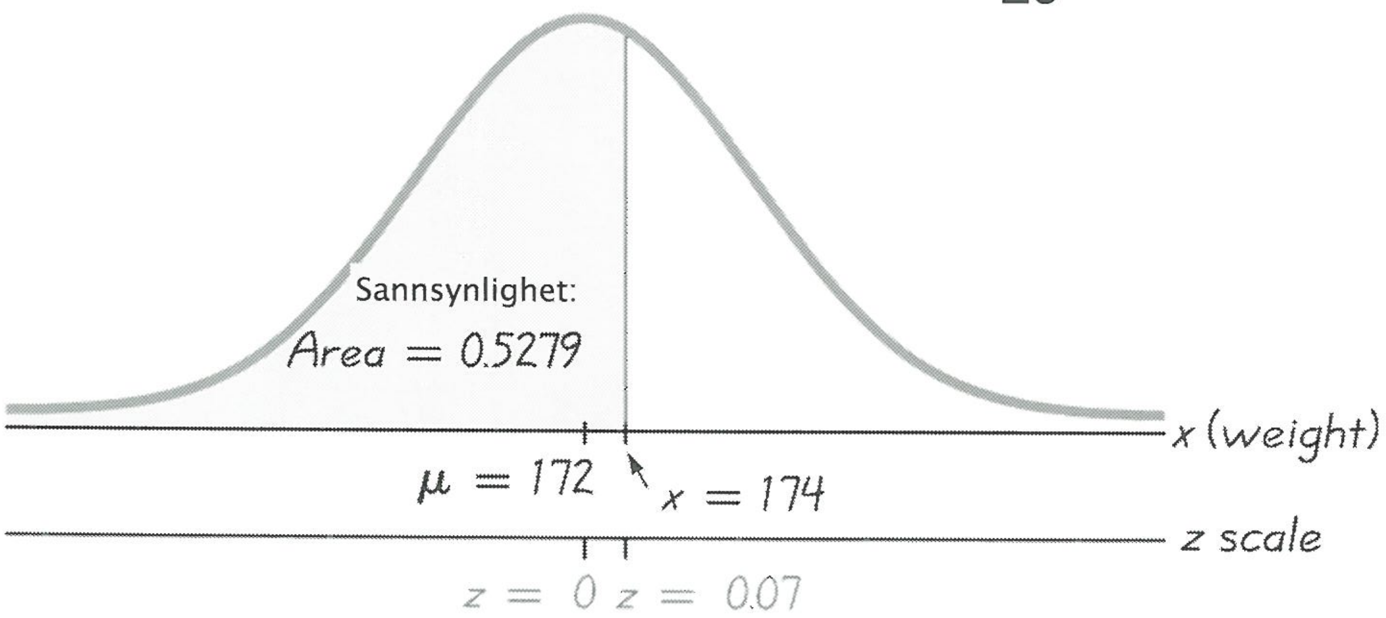
Anta at vekten på menn er normalfordelt

- Gjennomsnitt $\mu = 172$ pounds
- Standardavvik på $\sigma = 29$ pounds.

Sannsynligheten for at tilfeldig mann veier mindre enn 174 pounds?

$\mu = 172$
$\sigma = 29$

$$z = \frac{174 - 172}{29} = 0.07$$



Vekteksempel 2

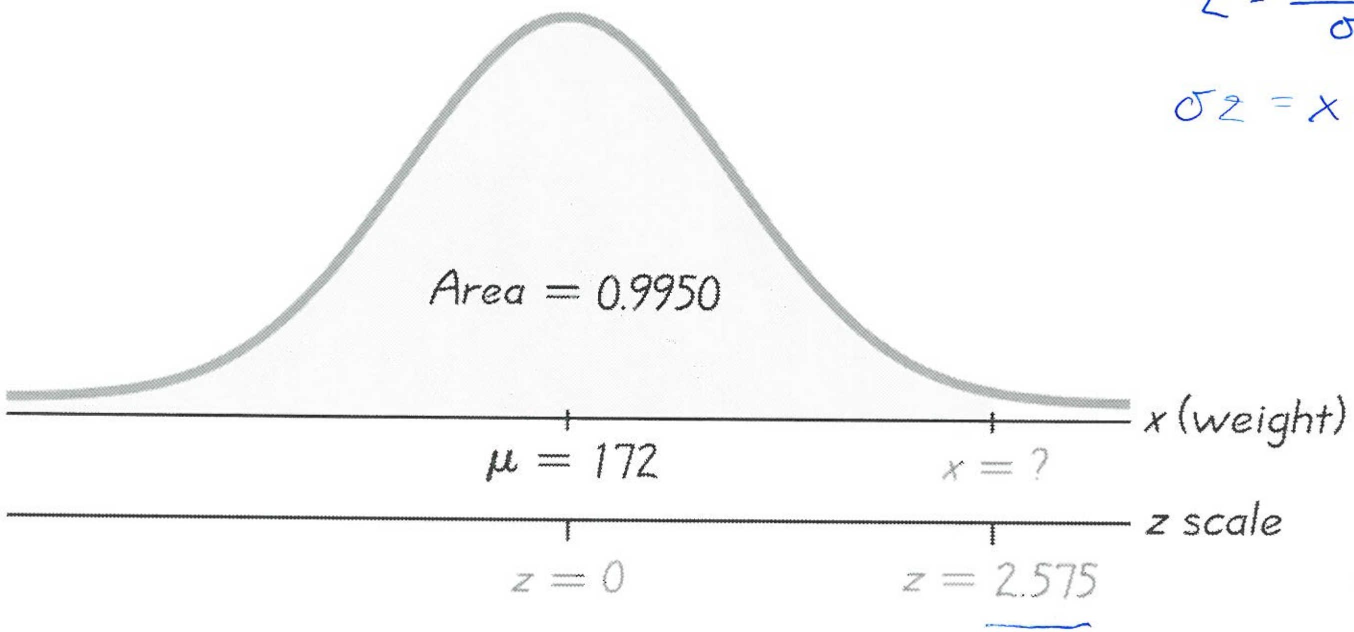
Example

- Gjennomsnitt $\mu = 172$ pounds
- Standardavvik på $\sigma = 29$ pounds.

Hvilken vekt skiller de 0.5% tyngste fra de 99.5% letteste?

$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$

$\sigma z = x - \mu$ $\boxed{x = \mu + \sigma z}$



Svar

$x = 172 + 2.575 \cdot 29$

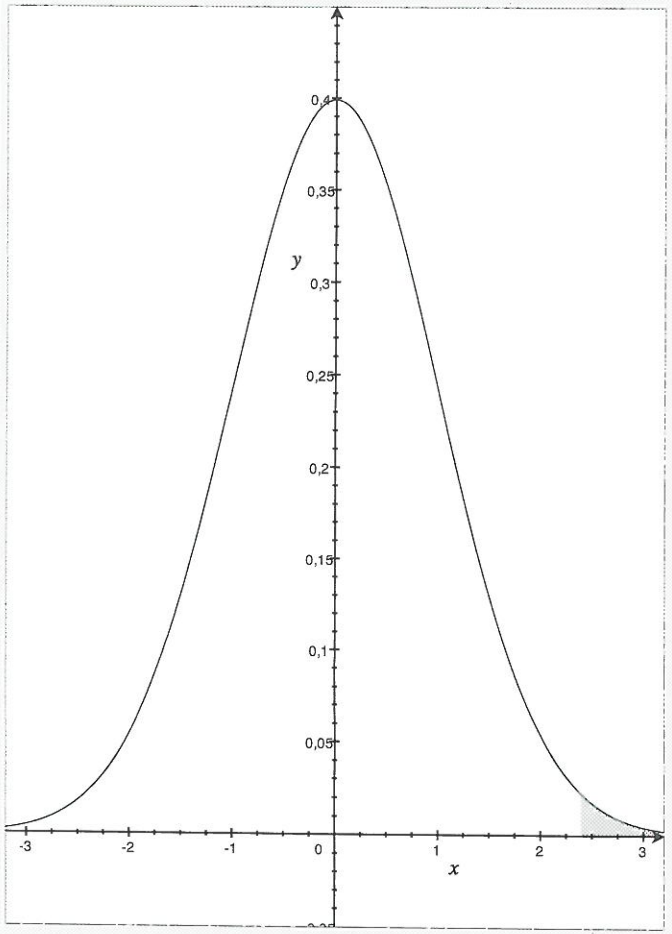
$x = 246.675$

$x = 172 + \underset{z}{2.575} \cdot 29$

Rekrutter 1

Example

Høyden på rekruttene er normalfordelt med $\mu = 179.5$ og $\sigma = 6.4$. Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig rekrutt er høyere enn 195 cm?

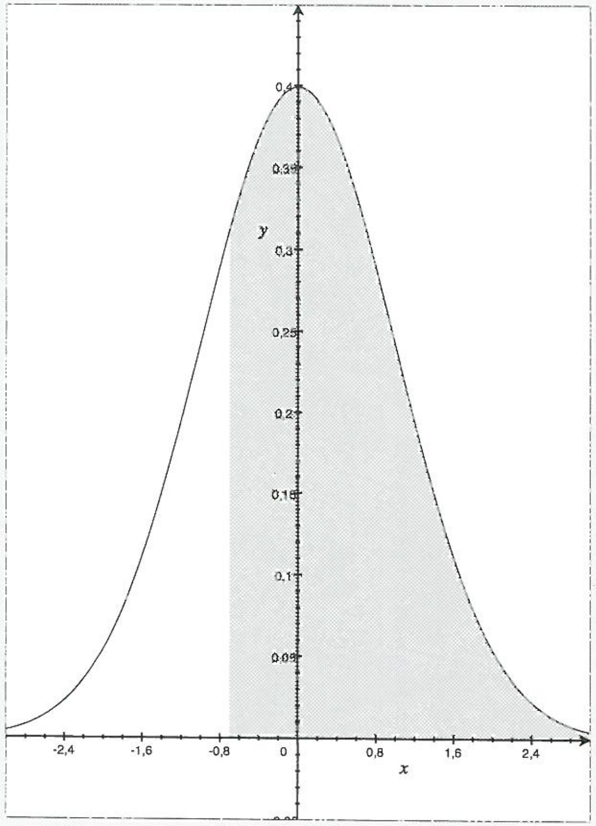


1. Regn ut z-verdien til 1.95:
   $z = \frac{195-179.5}{6.4} = 2.42$
2. Hva er sannsynligheten for at z er større enn 2.42?
3. $P(z > 2.42) = 1 - P(z < 2.42) = 0.0078$ (Se **Tabell A2**)
4. Det er bare 0.78% sannsynlighet for at en rekrutt er over 195 cm

Rekrutter 2

Example

Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig rekrutt er høyere enn 175 cm?

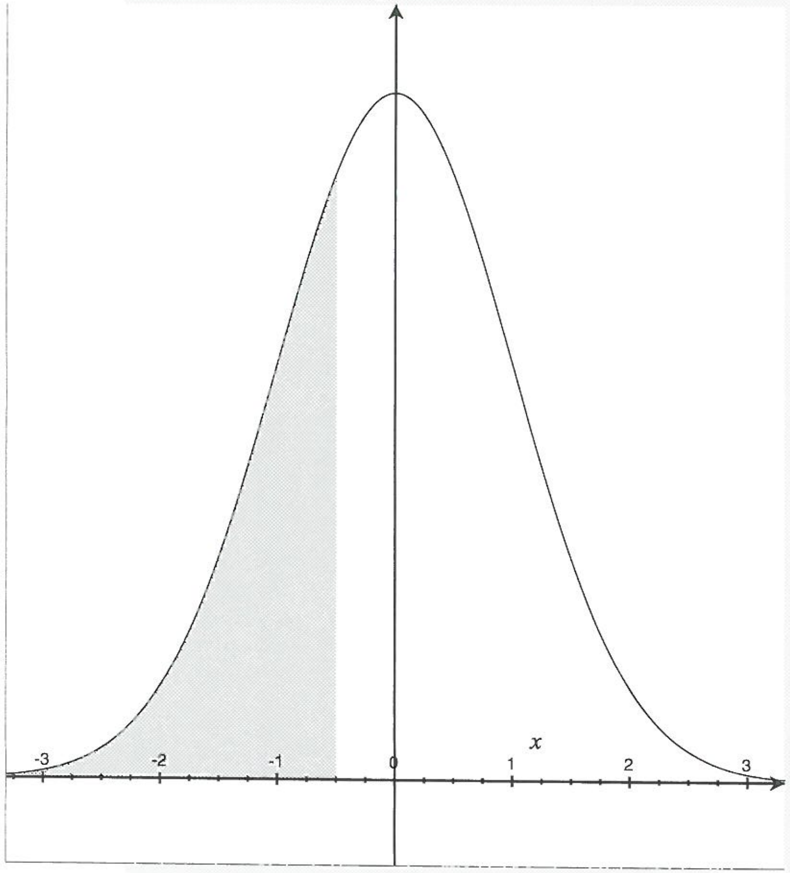


1. z-verdien til 175:
   $z = \frac{175-179.5}{6.4} = -0.70$
2. $P(z > -0.70) =$
   $1 - P(z < -0.70) =$
   $1 - 0.242 = 0.758$
3. 75.8% sannsynlighet for at en rekrutt er høyere enn 175cm

IQ

Example

IQ er normalfordelt med $\mu = 100$ og $\sigma = 10$. Hva er sannsynligheten for at en person har IQ over 115? Under 95?



1. z-verdien til 115: $z = \frac{115-100}{10} = 1.5$
2. Tabell a2: $P(z > 1.5) = 1 - P(z < 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$
3. Sannsynligheten for at en person har IQ over 115 er 6.7%
4. z-verdien til 95: $z = \frac{95-100}{10} = -0.5$
5. $P(z < -0.5)$i tabell A2
6. $P(z < -0.5) = 0.3085$
7. Det er 30.9% sannsynlighet for at en person har IQ under 95