FORELESNING 15

MET 3431

EIVIND ERIKSEN

MAR 15 2012

STATISTIKK

PLAN:

① Hypotese-testing [T] 8.1-8.3, 8.5
- for populasjonsandel p
- for gjennomsnitt μ

Grunnleggende begreper Kapittel 8

- Nullhypotese H_0
- Alternativ hypotese H_1
- Testobservator
- Kritisk område og Kritisk verdi
- Signifikansnivå
- p-verdi
- Type I og Type II feil

Gjør en innsats for å forstå disse ordene.

Postbanken eksempel

Example

- μ er gjennomsnittet på spørsmålet *Anbefale* for alle kunder
- Ledelsen: Hvis $\mu < 7.0 \Rightarrow$ sett inn tiltak for å øke μ
- I fila *Bank2008* : $\overline{x} = 6.4$ for 91 kunder
- Nullhypotesen er at gjennomsnittet i populasjonen er $\mu = 7.0$
- Må tiltak iverksettes, mao. er $\mu < 7$?
- Vi må finne ut om det er uvanlig at 91 kunder gir et gjennomsnitt $\overline{x} = 6.4$ når $\mu = 7$
- Sannsynligheten viser seg (se senere) å være 2.3% for å få 6.4 eller lavere dersom $\mu = 7$
- Dette er så uvanlig at vi må anta at $\mu < 7.0$
- Nullhypotesen forkastes: Iverksett tiltak!

Hva er nullhypotesen og hva er alternativhypotesen ?

H_0 og H_1

- Hypotesene er alltid påstander om *parametere* som μ og p.
- Skriv påstanden ned på symbolsk form
- Skriv også ned på symbolsk form det motsatte av påstanden
- La H_1 være den av påstandene som ikke inneholder $=$
- Den andre påstanden skrives nå med $=$ og den blir nullhypotesen H_0
- Figur 8-2 i boka

Hvis du selv vil vise at en påstand er sann, så formuler den som H_1 med $<$, $>$ eller $\neq$

H_0	H_1
$=$	$<>\neq$

Hva er nullhypotesen og hva er alternativhypotesen ?

Example

Her er to påstander.

- Andelen studenter som sykler til skolen er mer enn 0.5
- Gjennomsnittshøyden til volleyballspillere i eliten er 189 cm

Skriv opp hypotesene for hver påstand.

Svar:

- $H_0 : p = 0.5,\ H_1 : p > 0.5$
- $H_0 : \mu = 189,\ H_1 : \mu \neq 189.$

Testobservator

Testobservatoren brukes til å velge H_0 eller H_1

- Testobservatoren(eng: test statistic) beregnes ifra stikkprøven
- Den er beregnet under forutsetning av at H_0 er sann

Example

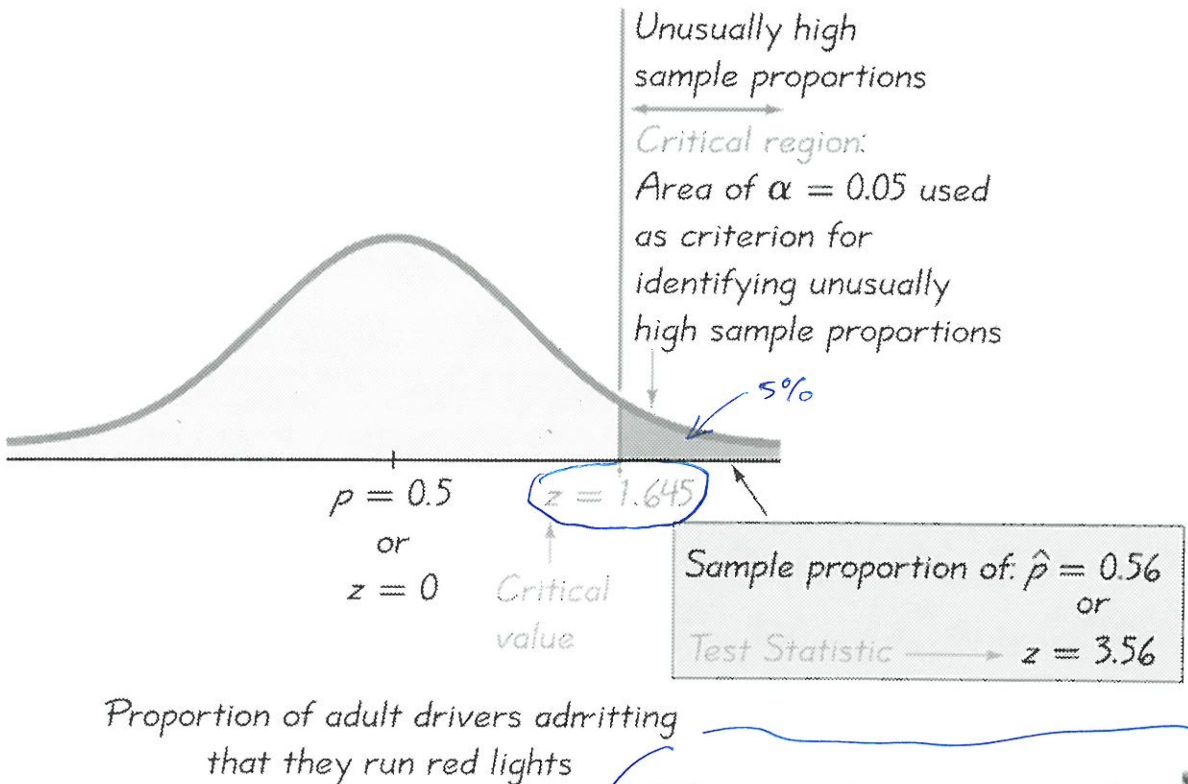
For å teste hypoteser om andelen bruker vi testobservatoren

$z = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.56-0.50}{\sqrt{\frac{0.50\cdot(1-0.50)}{880}}} \simeq 3.56$

- Av $n = 880$ studenter bruker 56% lesesalen ukentlig
- Vi forutsetter at $H_0 : p = 0.5$ er sann. Da blir testobservatoren $z = \frac{0.56-0.5}{\sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{880}}} = 3.56$ Vi vet at en z-verdi på 3.56 er 'uvanlig'.
- Stikkprøve andelen på 56% er derfor *signifikant* forskjellig fra 50% (figur neste side)
- Vi konkluderer med at mer enn halvparten bruker lesesalen ukentlig

$H_1 \quad p > 0.50$

Forkastningsområdet (eng: critical region) er de verdiene til testobservatoren som gjør at vi må forkaste nullhypotesen.



Forkastningsområde:

$Z \geq 1.645$

Testens signifikansnivå α

- Signifikansnivået angis med α
- Det er sannsynligheten for at testobservatoren havner i forkastningsområdet dersom H_0 er sann
- Analogi til rettssal: Sannsynligheten for at en uskyldig blir dømt
- Vanlige valg er $\alpha = 0.1$, $\alpha = \cancel{0.5}$ 0.05 og $\alpha = 0.01$.

Kritisk verdi

- En kritisk verdi separerer forkastningsområdet fra de verdier av testobservatoren som ikke resulterer i å forkaste H_0
- I figuren på forrige side er kritisk verdi $z = 1.645$

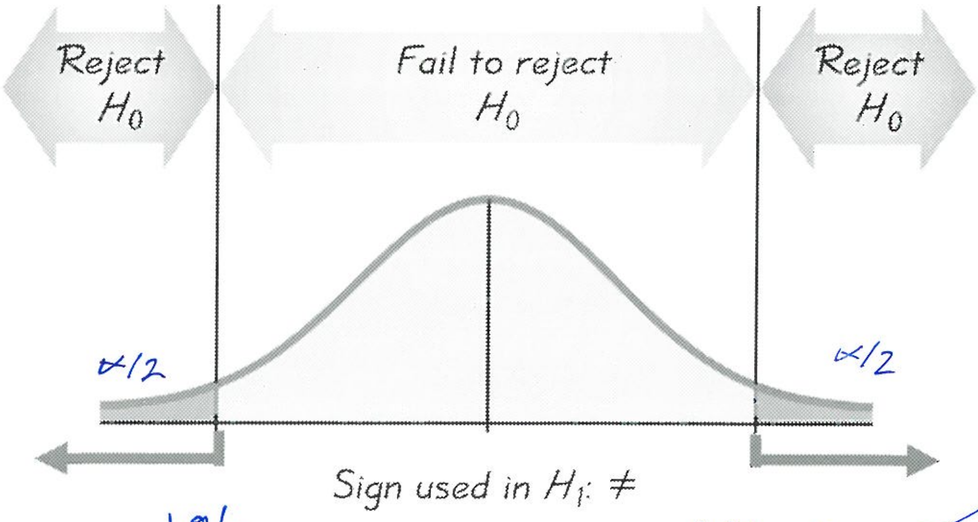
Tosidig hypotesetest

H_0: =

H_1: ≠

α likt fordelt i de to halene til forkastningsområdet

Betyr mindre enn eller større enn



$\alpha = 5\%$

$\frac{\alpha}{2} = 2.5\%$

-1.96 0 1.96

Forkastningsnivå:

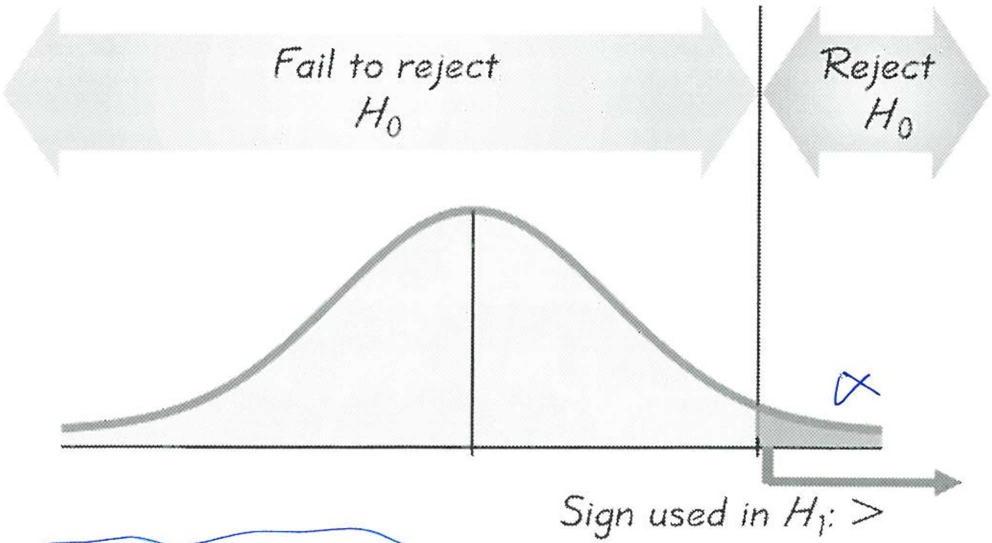
$Z \geq 1.96$ eller $Z \leq -1.96$

Høyresidig hypotesetest

H_0: =

H_1: >

Mot høyre



$\alpha = 0.05$

$\Downarrow$

$z = 1.645$

Forkastningsområde:

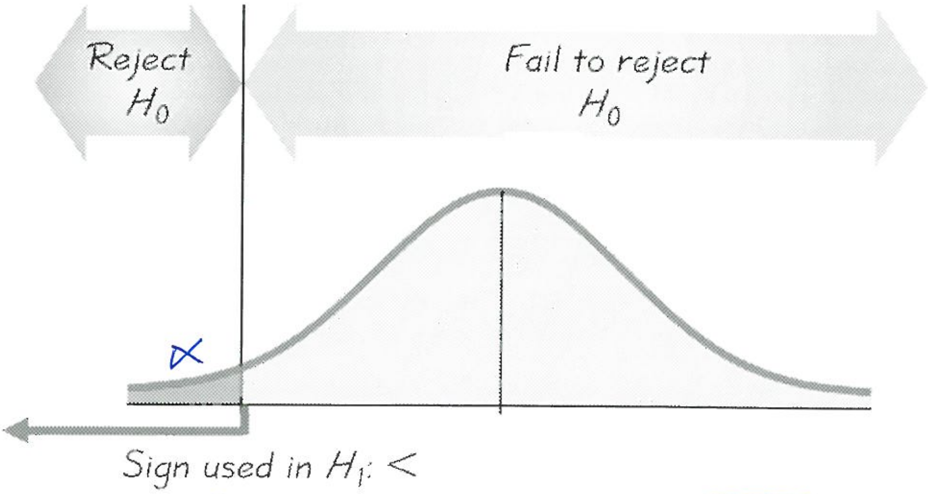
$z \geq 1.645$

Venstresidig hypotesetest

H_0: =

H_1: <

Mot venstre



$\alpha = 0.05$

$\Downarrow$

$z = -1.645$

Forkastningsområde:

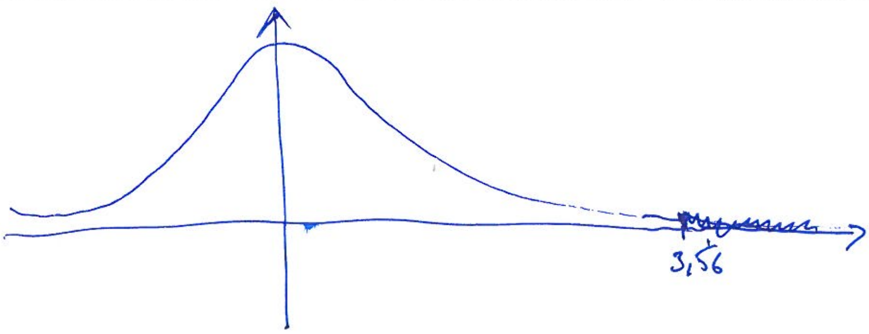
$z \leq -1.645$

p-verdien

$H_0: p = 0.50$ $H_1: p > 0.50$

p-verdien

- Antar at H_0 er sann
- Regner ut testobservatoren for testen $z = 3.56$
- p-verdien er sannsynligheten for å få en verdi på testobservatoren som er *minst like uvanlig* som den du fikk
- Nullhypotesen forkastes hvis p-verdien er mindre enn signifikansnivået



$$p = P(Z \geq 3.56) = 1 - 0.9999 = 0.0001$$
$$= 0.01\%$$

$$p = 0.01\% < 5\%$$
$$\Downarrow$$

Forkast H_0

To metoder for hypotesetesting

Hypotesetesting

- Konklusjonen av testen er enten
  1. Forkast nullhypotesen, eller
  2. Ikke forkast nullhypotesen

Den tradisjonelle metoden

1. Forkast nullhypotesen dersom testobservatoren er i forkastningsområdet $Z = 3.56 > 1.645 \Rightarrow$ Forkaste H_0
2. Ikke forkast nullhypotesen dersom testobservatoren ikke er i forkastningsområdet

p-verdi metoden

1. p-verdien er mindre enn signifikansnivået $\alpha \rightarrow$ Forkast H_0
2. p-verdien er større enn signifikansnivået $\alpha \rightarrow$ Ikke forkast H_0

$p = 0.01\% < \alpha = 5\% \Rightarrow$ Forkaste H_0

$= 0.0001$

p-verdi metoden

Start

1 Identify the specific claim or hypothesis to be tested, and put it in symbolic form.

2 Give the symbolic form that must be true when the original claim is false.

3 Of the two symbolic expressions obtained so far, let the alternative hypothesis H_1 be the one not containing equality, so that H_1 uses the symbol $>$ or $<$ or $\neq$. Let the null hypothesis H_0 be the symbolic expression that the parameter *equals* the fixed value being considered.

4 Select the significance level α based on the seriousness of a type I error. Make α small if the consequences of rejecting a true H_0 are severe. The values of 0.05 and 0.01 are very common.

5 Identify the statistic that is relevant to this test and determine its sampling distribution (such as normal, t, chi-square).

6 Find the test statistic and find the P-value (see Figure 8-6). Draw a graph and show the test statistic and P-value.

7 Reject H_0 if the P-value is less than or equal to the significance level α. Fail to reject H_0 if the P-value is greater than α.

8 Restate this previous decision in simple, nontechnical terms, and address the original claim.

Stop

Tradisjonell metode

Start

1 Identify the specific claim or hypothesis to be tested, and put it in symbolic form.

2 Give the symbolic form that must be true when the original claim is false.

3 Of the two symbolic expressions obtained so far, let the alternative hypothesis H_1 be the one not containing equality, so that H_1 uses the symbol $>$ or $<$ or $\neq$. Let the null hypothesis H_0 be the symbolic expression that the parameter *equals* the fixed value being considered.

4 Select the significance level α based on the seriousness of a type I error. Make α small if the consequences of rejecting a true H_0 are severe. The values of 0.05 and 0.01 are very common.

5 Identify the statistic that is relevant to this test and determine its sampling distribution (such as normal, t, chi-square).

6 Find the test statistic, the critical values, and the critical region. Draw a graph and include the test statistic, critical value(s), and critical region.

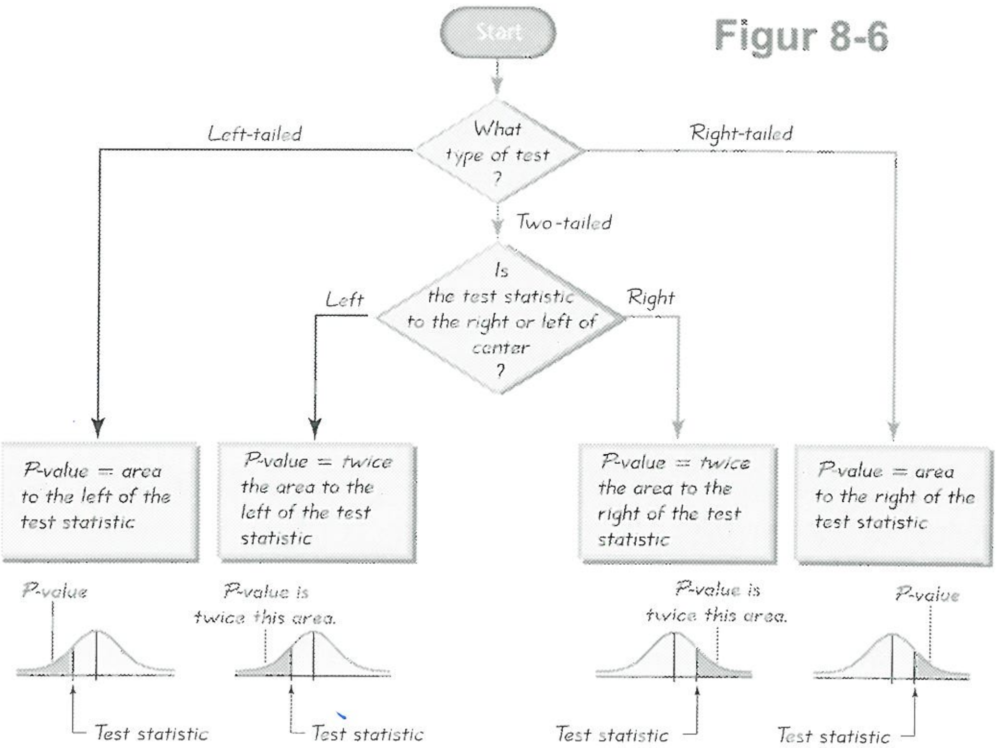
7 Reject H_0 if the test statistic is in the critical region. Fail to reject H_0 if the test statistic is not in the critical region.

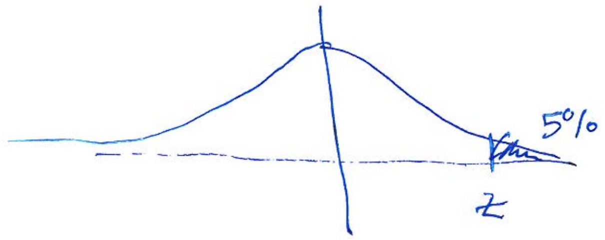
8 Restate this previous decision in simple, nontechnical terms, and address the original claim.

Stop

Bestemme p-verdien

- Dersom H_1 er tosidig, er p-verdien arealet i to haler
- Dersom H_1 er ensidig, er p-verdien arealet i en hale





Eksempel A

$H_0: p = 0.25 \quad H_1: p > 0.25$

Example

Signifikansnivået er $\alpha = 0.05$ og vi skal teste påstanden om at andelen $p > 0.25$. Stikkprøven gir testobservatoren $z = 1.18$

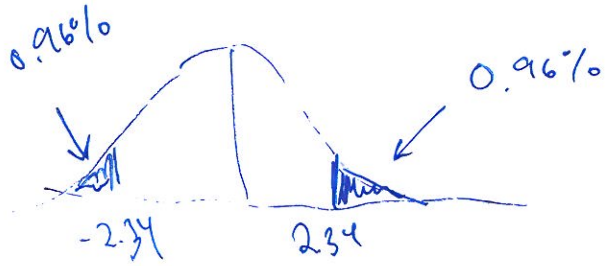
Spørsmål

- Er testen en- eller tosidig?
- Finn p-verdien
- Kom til en konklusjon om nullhypotesen H_0

$z = 1.18 \quad p = P(Z \geq 1.18) = 1 - 0.8810 = 0.1190$

Svar

- Høyresidig test. A2: arealet til høyre for $z = 1.18$ er 0.1190
- p-verdien 0.1190 er større enn $\alpha = 0.05$
- p verdien er relativt stor, så dette kunne ha skjedd ved en tilfeldighet
- Vi har ikke grunnlag til å forkaste $H_0 : p = 0.25$



Eksempel B

Example

Signifikansnivået er $\alpha = 0.05$ og vi skal teste påstanden om at andelen $p \neq 0.25$. Stikkprøven gir testobservatoren $z = 2.34$

Spørsmål

- Er testen en- eller tosidig?
- Finn p-verdien
- Kom til en konklusjon om nullhypotesen H_0

$p(z \geq 2.34) = 1 - 0.9904$
$= 0.0096$

Svar

- Tosidig test. A2: arealet til høyre for $z = 2.34$ er 0.0096
- p-verdien $2 \cdot 0.0096 = 0.0192$ er mindre enn $\alpha = 0.05$
- p verdien er relativt liten, så dette kunne ikke ha skjedd ved en tilfeldighet
- Vi har grunnlag til å forkaste $H_0 : p = 0.25$

Type I og Type II feil

En hypotesetest kan gi feil konklusjon. Det kan skje på to måter.

Type I feil

- H_0 er egentlig sann, men du forkaster H_0
- α - signifikansnivået- er sannsynligheten for å begå en type I feil.

Type II feil

- H_0 er egentlig gal, men du forkaster ikke H_0
- β er symbolet for sannsynligheten for en Type II feil, også kalt testens *styrke* (eng: power)