

FORELESNING 17

EIVIND ERIKSEN

MAR 22 2017

MET 3431

STATISTIKK

PLAN:

- ① Eksempel: Hypotestest av gjennomsnitt
- ② Sammenlignende gjennomsnitt for to stikprøver
 - uavhengige stikprøver
 - relaterte stikprøver

[T] 9.3
9.4

Husk:

- ① Arbeidskrav 6
- ② Oppgaver med læring fra veiledning
er lagt ut på It's Learning.

Eks: Postbanken, Verdi av variabelen Anbefale

$$H_0: \mu = 7.0$$

$$H_1: \mu < 7.0$$

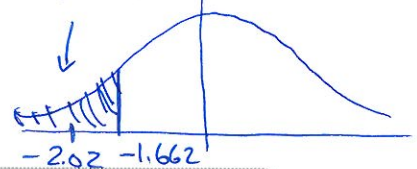
$$\text{Observert fra data: } \begin{cases} \bar{x} = 6.410 \\ s = 2.753 \end{cases}$$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{6.41 - 7.0}{2.753/\sqrt{91}} \approx -2.02$$

Kritisk t-verdi:

$$\alpha = 0.05 \quad n-1 = 90$$

Forkastningsområde



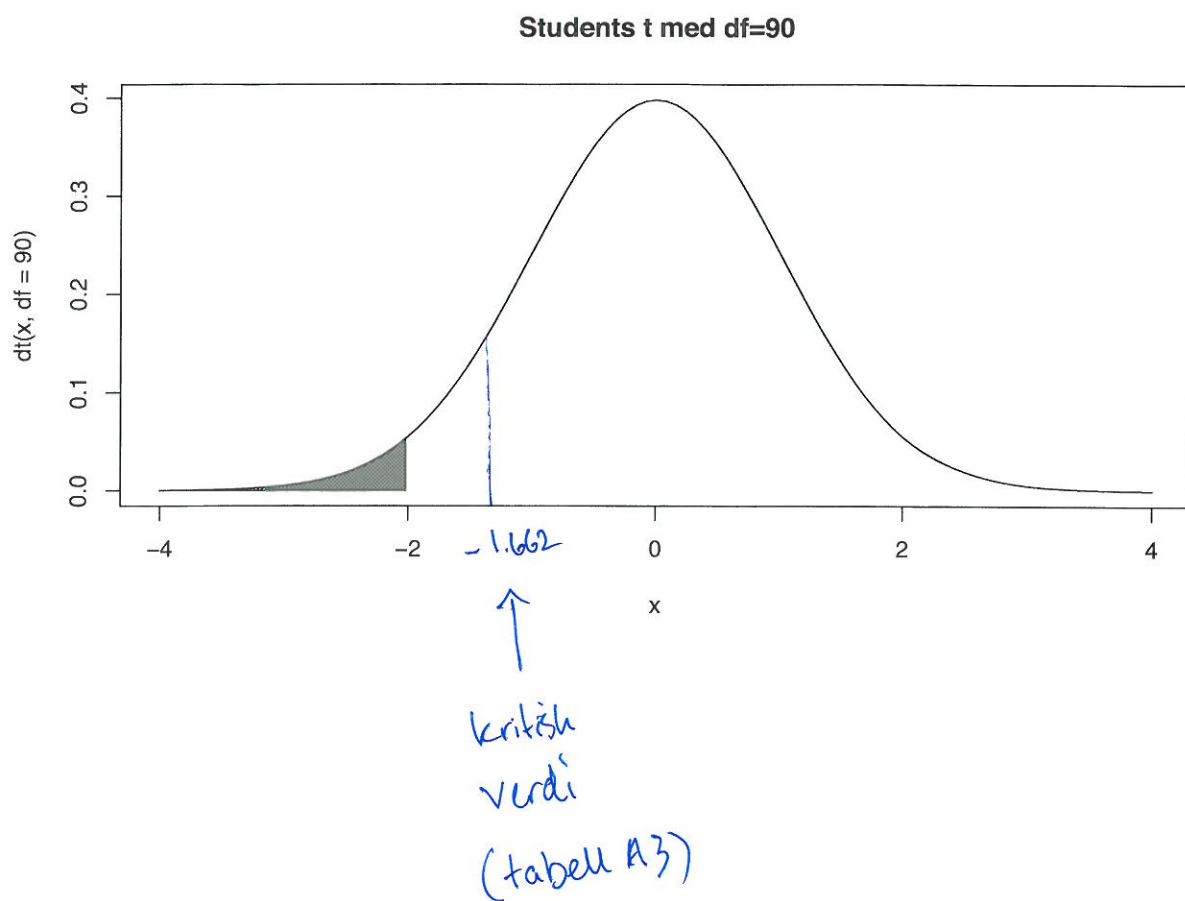
Example

- På side 9 så vi at p -verdien var 0.023 for en venstresidig test av $H_0: \mu = 7.0$ versus $H_1: \mu < 7.0$. Vi brukte JMP til å finne det ut.
- Vi skal nå gjøre testen uten JMP, ved å bruke A3. Vi bruker $\alpha = 0.05$
- Postbanken har $\bar{x} = 6.410$ og $s = 2.753$ for 91kunder
- Testobservator er da $t = \frac{6.41 - 7.0}{2.753/\sqrt{91}} = -2.02$
- Tabell A3 med 91 – 90 frihetsgrader gir da kritisk verdi 1.662
- Vi forkaster H_0 : Det er grunnlag for å hevde at $\mu < 7$ i populasjonen

Atta

	tTest
Test Statistic	-2.0181
Prob > t	0.0466*
Prob > t	0.9767
Prob < t	0.0233*

Arealet er p -verdien. JMP gir at dette er 0.023.



- ① 9-3: Sammenligne gjennomsnitt for to uavhengige stikkprøver
- ② 9-4: Sammenligne gjennomsnitt for to relaterte stikkprøver
- ③ Oppvarming til kap 10: Rette linjer

Sammenligne to populasjoner

Data fra to stikkprøver

- Ofte ønsker vi å sammenligne data som kommer fra to stikkprøver
- I kapittel 9 så bruker vi stoffet fra kap 7 (estimering) og kap 8 (hypotesetesting) til å sammenligne to populasjoner

Section 9-3

Pensum er Part 1. Variansen i de to populasjonen antas ikke å være like.

Relaterte stikkprøver

Relaterte stikkprøver

- Vi sier at stikkprøvene er *relaterte* dersom en verdiene i de to stikkprøvene høres naturlig sammen i par
- To relaterte stikkprøver har derfor alltid den samme størrelsen
- Relaterte stikkprøver får vi fra:
 - ① Matchede par, eller
 - ② Samme objektet målt to ganger (før og etter)

Example

Slankeprogram: Du sammenligner vekten før og etter dietten.

- En vekt til en person i den første stikkprøven matches naturlig med vekten til *den samme* personen etter dietten

Uavhengige stikkprøver

Uavhengige stikkprøver

- Vi sier at stikkprøvene er *uavhengige* dersom en verdi i den ene stikkprøven ikke kan matches med en bestemt verdi fra den andre stikkprøven
- To uavhengige stikkprøver kan derfor ha forskjellig størrelse

Example

Sammenligne gjennomsnittsvekt hos røykere og ikke-røykere

- En stikkprøve med røykere, og en annen stikkprøve med ikke-røykere
- En røyker kan ikke naturlige matches med en bestemt ikke-røyker
- Stikkprøvene er uavhengige

9.3: Uavhengige stikkprøver

Forutsetninger

Sjekk disse kravene

For at prosedyrene i seksjon 9-3 skal virke må:

- Begge stikkprøvene er uavhengige og tilfeldige
- Enten er begge stikkprøvene store (mer enn 30 i hver stikkprøve)
- Eller så kommer begge stikkprøvene fra normalfordelte populasjoner

Hypoteser for to uavhengige stikkprøver

Hypoteser

Vi ønsker å teste om gjennomsnittet er det samme i de to populasjonene:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

og alternativet kan være en- eller tosidig. Et tosidig alternativ skrives

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2.$$

Et ensidig alternativ kan f.eks. være

$$H_1 : \mu_1 > \mu_2.$$

testobservator: hypotesebest gj.snitt
en stikkprøve

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$$

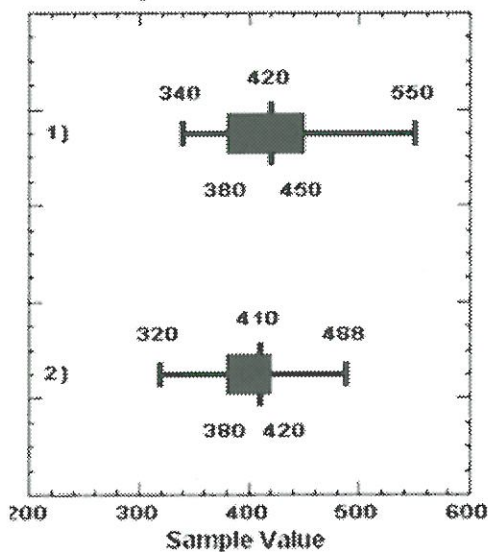
Testobservator for to uavhengige stikkprøver

Testobservatoren

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

- $\bar{x}_1$ og $\bar{x}_2$ er stikkprøve gjennomsnittene
- s_1 og s_2 er stikkprøve standardavvikene
- Hvis H_0 er sann, så har t i formelen over en t -fordeling
- **Frihetsgraden** er lik en mindre enn den størrelsen på den minste stikkprøven.
- Da kan tabell A-3 brukes til å finne kritiske verdier.

Eksempel: Lønn 1



Figur: Boksplott lønn menn vs kvinner

Example

Du ønsker å sammenligne gjennomsnittlig startlønn BI master kandidater i Bergen og Stavanger.

$$H_0 : \mu_S = \mu_B \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_B \neq \mu_S$$

og vi bruker $\alpha = 0.05$. Stikkprøvene gir:

Stavanger $n = 70$, $\bar{x}_S = 418500$ og $s_S = 45500$

Bergen $n = 73$, $\bar{x}_B = 403700$ og $s_B = 30600$

Eksempel: Lønn 2

Example

- Vi har $df = 69$ (rund ned til 65 for å være på den sikre siden)
- Tabell A-3 gir da kritisk verdi

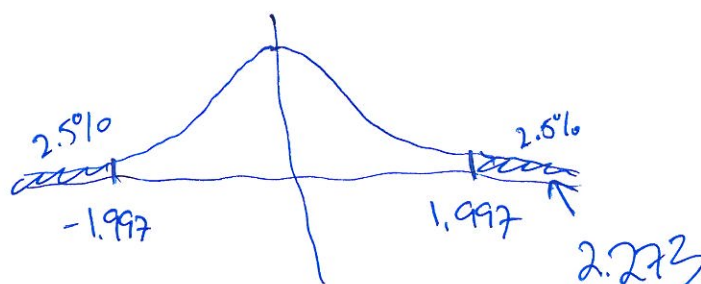
$$t_{0.025} = 1.997$$

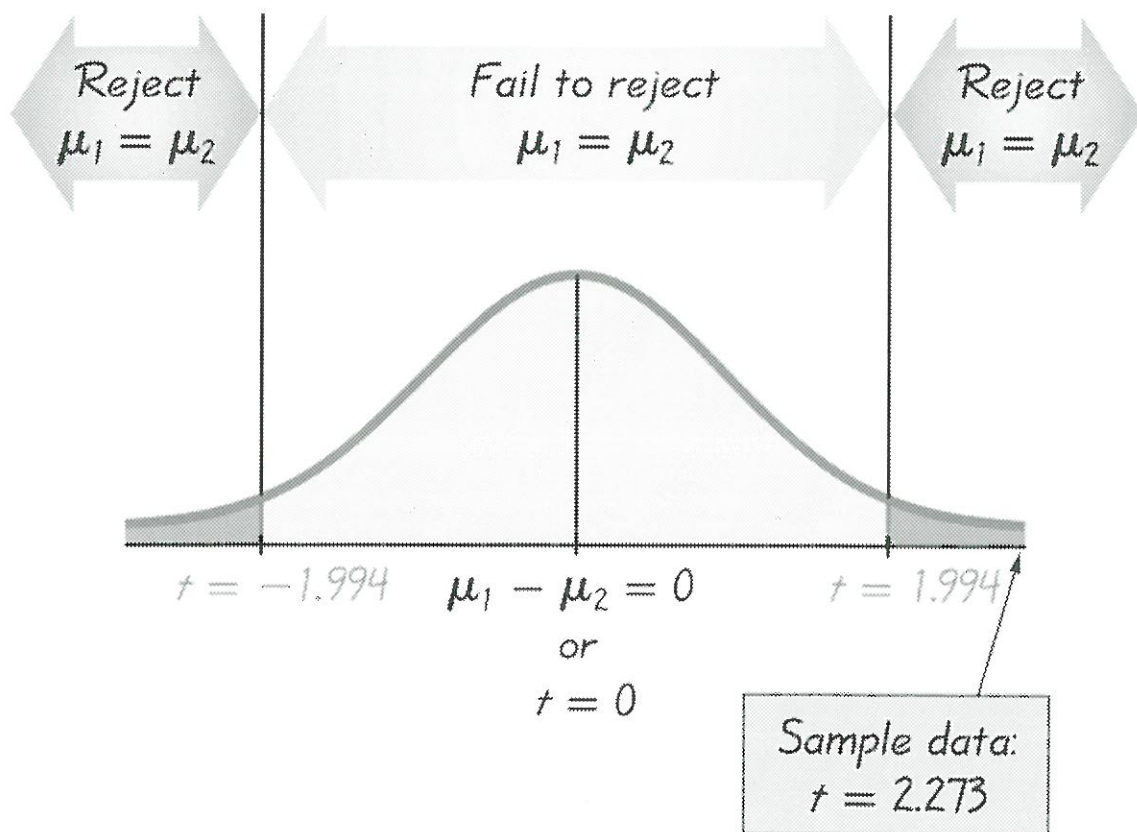
(midt mellom
60 og 70)

- Testobservatoren blir

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \quad t = \frac{418500 - 403700}{\sqrt{\frac{45500^2}{70} + \frac{30600^2}{73}}} = 2.273$$

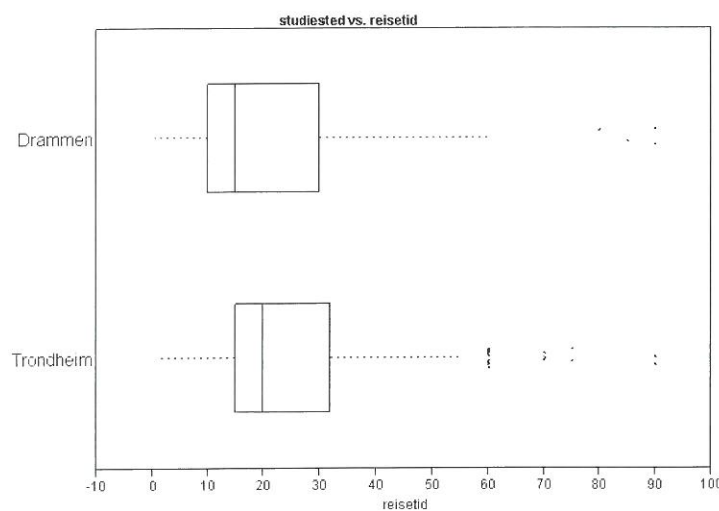
- Testobservatoren er mer ekstrem enn kritisk verdi: Forkast H_0
- Konklusjon: Det er grunn til å hevde at det er en forskjell i startlønn mellom Stavanger og Bergen





Figur: Testobservator og kritisk verdi for lønns-eksempelet

Eksempel: Reisetid Drammen vs. Trondheim



Figur: Boksplott reisetid

Example

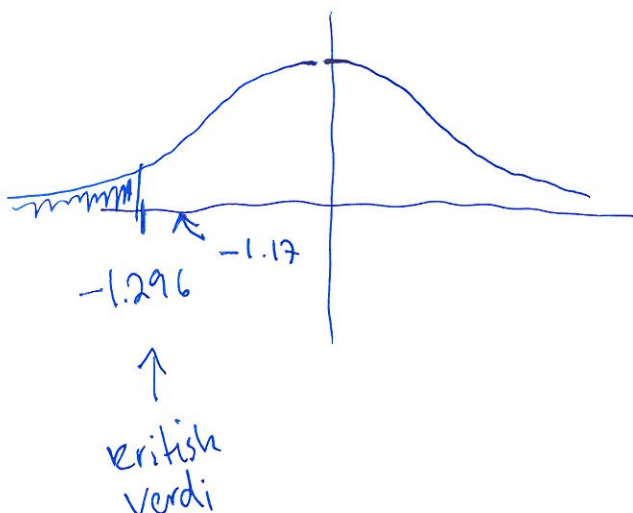
BI Drammen ligger mer sentralt enn BI Trondheim. Vi ønsker å teste på $\alpha = 0.1$ nivået om det er lengre reisetid i Trondheim.

$$H_0 : \mu_D = \mu_T \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_D < \mu_T$$

I fila *klassens data alle*:

Drammen $n = 65$, $\bar{x}_D = 23.45$ og $s_D = 21.20$

Trondheim $n = 291$, $\bar{x}_T = 26.71$ og $s_B = 15.86$



$$t = \frac{\bar{x}_D - \bar{x}_T}{\sqrt{\frac{s_D^2}{n_1} + \frac{s_T^2}{n_2}}} \approx -1.17$$

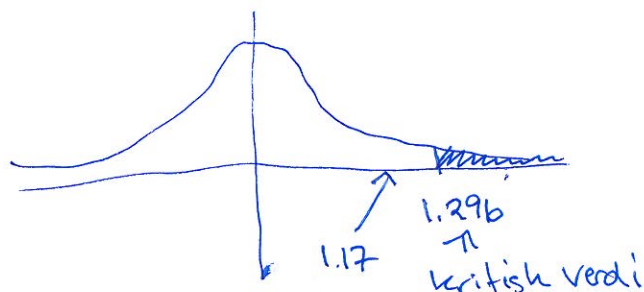
Beholder H_0 .

$$(H_0: \mu_D = \mu_T)$$

$$H_0: \mu_T = \mu_D$$

$$(H_1: \mu_D < \mu_T)$$

$$H_1: \mu_T > \mu_D$$



$$t = \frac{\bar{X}_T - \bar{X}_D}{\sqrt{\frac{S_T^2}{n_T} + \frac{S_D^2}{n_D}}}$$

Example

- Tabell A3 gir kritisk verdi ($df=64$, rundes ned til 60)
 $t_{0.1} = 1.296$ mens testobservatoren blir

$$t = \frac{26.71 - 23.45}{\sqrt{\frac{15.86^2}{291} + \frac{21.20^2}{65}}} = 1.17$$

- Vi forkaster ikke H_0 . Det er ikke tilstrekkelig grunnlag til å hevde at reisetiden i Trondheim er høyere enn i Drammen.

Forhaster ikke $H_0 \Rightarrow$ Beholder H_0 .

Test for to relaterte stikkprøver

Regn ut differansen i hvert par

- Er stikkprøven relatert, så regner vi ut differansene parvis
- Da har vi egentlig bare en stikkprøve av differanser d
- Da vil $\mu_1 = \mu_2$ være det samme som at gjennomsnittet av differansene er null: $\mu_d = 0$

Forutsetninger

- Tilfeldig stikkprøve
- Enten større enn $n = 30$
- Eller par av differanser kommer fra en normalfordelt populasjon

Notasjon

- d er differansen mellom to verdier i et par
- μ_d er populasjonsgjennomsnittet for alle differansene
- $\bar{d}$ er gjennomsnittet av differansene i stikkprøven
- s_d er standardavviket for differansene i stikkprøven
- n er antall par i stikkprøvene (begge stikkprøvene har denne størrelsen)

Test for to relaterte stikkprøver

Testobservator

For to relaterte stikkprøver:

- Nullhypotesen er $H_0 : \mu_1 = \mu_2 \Leftrightarrow \mu_d = 0$
- Testobservatoren blir da

$$t = \frac{\bar{d}}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}}$$

- Har $n - 1$ frihetsgrader

Test for to relaterte stikkprøver

To relaterte stikkprøver og t -testen

- To relaterte stikkprøver x og y : Regn ut de parvise differansene
- Regn ut differansenes gjennomsnitt $\bar{d}$ og standardavvik s_d
- Hypotesene er

$$H_0 : \mu_x = \mu_y \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_x \neq \mu_y$$

- Dersom H_0 er sann, er $\bar{d}$ gjennomsnittlig lik null. Da blir testobservatoren

$$t = \frac{\bar{d}}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}}$$

- Forkast H_0 dersom t går utenfor kritisk verdi t_α fra tabell A-3

Example

Selger man flere pakker Cornflakes hvis pakkene står i øyehøyde? Her er salgstall for 13 par av butikker, der hvert par er likt iforhold til beliggenhet, nabolag, størrelse. x er salgstall for øyehøyde, y er for plassering nede ved gulvet.

x	111	150	130	154	67	112	84	123	71	62	38	51	77
y	71	121	133	126	93	49	109	96	27	58	36	37	69
d	40	29	-3	28	-26	63	-25	27	44	4	2	14	8

- Ensidig test: Er øyehøyde best? $H_0 : \mu_x = \mu_y$ vs. $H_1 : \mu_x > \mu_y$
- $\bar{d} = 15.8$ og $s_d = 26.2$ gir t - verdi

$$t = \frac{15.8}{\frac{26.2}{\sqrt{13}}} = 2.17$$

- Kritisk verdi fra tabell A-3 $t_\alpha = 1.78$ (for $\alpha = 0.05$). t -verdien er større enn kritisk verdi: Forkast H_0
- Det er tilstrekkelig grunnlag til å hevde at øyehøyde selger bedre