FORELESNING 9

MET 3431

EIVIND ERIKSEN FEB 16 2012 STATISTIKK

PLAN:

1. Diskrete sannsynlighetsfordelinger [T] 5.2
2. Binomisk fordeling [T] 5.3

Husk: Arbeidskrav 3 (kap. 3)
- Frist mandag 20/02 kl 12

Repetisjon:

En tilfeldig variabel X er en variabel der verdien til X avhenger av utfallet av en tilfeldig prosedyre.

Eks: Tilfeldig prosedyre / forsøk: Vi kaster en terning
Variabelen X = antall øyne på terningen.

Seks mulige utfall → Verdiene 1, 2, 3, 4, 5, 6

Variabelen X er diskret hvis de mulige verdiene til X er diskret (dvs: en viss avstand mellom de mulige verdiene, typisk heltall; typisk 1, 2, 3, 4, 5, 6).

Variabelen X er kontinuerlig hvis de mulige verdiene til X er kontinuerlig.

Variabelen X i Eks. ovenfor er diskret.

Fordelingen til variabelen X er en teoretisk / matematisk modell som gir sannsynlighetene til de ulike verdiene X kan ha.

Eks: Vi kaster en terning; X = antall øyne. Vi tenker oss at de seks utfallene er like sannsynlige. Da blir fordelingen til X gitt ved

$$p(1) = p(X=1) = \frac{1}{6} \qquad p(4) = p(X=4) = 1/6$$

$$p(2) = p(X=2) = \frac{1}{6} \qquad p(5) = p(X=5) = 1/6$$

$$p(3) = p(X=3) = 1/6 \qquad p(6) = p(X=6) = 1/6$$

Krav til en fordeling:

(i) $p(x_i)$ oppfyller $0 \leq p(x_i) \leq 1$ for alle verdier x_i

(ii) $\sum_i p(x_i) = p(x_1) + p(x_2) + \ldots = 1$

Forventning og standardavvik til en tilfeldig variabel

Forventning: $\mu = E(X) = \overline{X}$

Forventning / ~~Gjennomsnitt~~

~~Populasjonsgjennomsnittet~~ μ til en tilfeldig variabel:
Forventningen

$$\mu = \sum x \cdot P(x) = x_1 \cdot P(x_1) + x_2 \cdot P(x_2) + \dots$$

Standardavvik til en tilfeldig variabel

Standardavviket σ ~~i populasjonen:~~ til X

$$\sigma = \sqrt{\sum (x - \mu)^2 \cdot P(x)}$$

Varians: $\sigma^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 \cdot p(x_i) = (x_1 - \mu)^2 \cdot p(x_1) + (x_2 - \mu)^2 \cdot p(x_2) + \dots$

Std. avvik: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

Eks: X = antall øyne på en terning

x_i	1	2	3	4	5	6
$p(x_i)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

$$\mu = E(X) = \bar{X} = \overset{x_1}{1} \cdot \overset{p(x_1)}{\frac{1}{6}} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = \underline{\underline{3.5}}$$

$$\sigma^2 = (\overset{x_1}{1} - \overset{\mu}{3.5})^2 \cdot \overset{p(x_1)}{\frac{1}{6}} + (2-3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (3-3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (4-3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (5-3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (6-3.5)^2 \cdot \frac{1}{6}$$

$$\cong 2.9$$

$$\sigma \cong \sqrt{2.9} \simeq \underline{\underline{1.7}}$$

Forventning og standardavvik for et terningkast

Example

Tabell: sannsynlighetsfordeling for et terningkast, se side 14

x	1	2	3	4	5	6
$P(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$\begin{aligned}
\mu &= 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} \\
&= \frac{21}{6} = 3.5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma &= \sqrt{(1-3.5)^2\cdot\frac{1}{6} + (2-3.5)^2\cdot\frac{1}{6} + \cdots + (6-3.5)^2\cdot\frac{1}{6}} \\
&= \sqrt{\frac{17.5}{6}} \simeq 1.71
\end{aligned}$$

Teoretisk modell for X

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}$$

Forventning:

$$\mu = \sum x_i \cdot p(x_i) = x_1 \cdot p(x_1) + x_2 p(x_2) + \dots$$
$$= 3.5$$

Varians og std. avvik:

$$\sigma^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 \cdot p(x_i) = (x_1 - \mu)^2 p(x_1) + \dots$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \simeq 1.7$$

Data

1	8
2	10
3	9
4	12
5	11
6	10
	60

Gjennomsnitt i utvalget:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{8 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + \dots}{60} \simeq \underline{3.6}$$

Varians / std. avvik i utvalget:

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{8(1-3.6)^2 + 10 \cdot (2-3.6)^2 + \dots}{59}$$

$$\simeq 2.8$$

$$s = \sqrt{s^2} \cong \sqrt{2.8} \simeq \underline{1.7}$$

(2) Binomisk fordeling

- et forsøk gjentas mange ganger (n)
- i hvert forsøk er sannsynligheten for suksess p
- forsøkene er uavhengige av hverandre

binomisk forsøksrekke

X = antall suksesser

Eks 1: Vi kaster en terning 10 ganger
X = antall ganger vi får 5.

$n=10 \quad p = 1/6$

$$p(X=2) = p(2) = \binom{10}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^8$$

$$p(X=i) = p(i) = \binom{10}{i} \cdot p^i \, (1-p)^{10-i}$$

$$\boxed{p(X=i) = \binom{n}{i} p^i \, (1-p)^{n-i}}$$

Permutasjoner

<u>N=2:</u>

1 2
2 1

$2! = 2$

<u>N=3:</u>

1 2 3
1 3 2
2 1 3
3 1 2
2 3 1
3 2 1

$3! = 6$

Antall permutasjoner av N objekter

En permutasjon er en ordning av objektene i en viss rekkefølge.
Hvis vi har N objekter, er antallet ordninger:

(N fakultet)

$$N! = N \cdot (N-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

$2! = 2 \cdot 1 = 2$
$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Example

Hvor mange måter kan 7 personer stille seg i kø på?
Svar: $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ måter

BI-kalkulator: 7 $\boxed{\text{2ND}}$ $x!$ = 5040

$\binom{7}{2}$ = antall måter velge 2 av 7 objekter

Defn: $$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!\cdot(7-2)!} = \frac{7!}{2!\,5!}$$

$$= \frac{7\cdot 6\cdot \cancel{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{\underbrace{2\cdot 1}_{2!}\cdot \underbrace{\cancel{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}_{5!}}$$

$$= \frac{7\cdot 6}{2\cdot 1} = \underline{\underline{21}}$$

Bl-kalk: $7 \ \boxed{2ND}\ nC_R\ 2 = 21$

Formel:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{n\cdot(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

Overgang til det siste uttrykket i Forkorting

$$\frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{n\cdot(n-1)\ldots(n-r+1)\cancel{(n-r)\ldots 2\cdot 1}}{r\cdot(r-1)\cdots 1\cdot\cancel{(n-r)\ldots 2\cdot 1}} = \frac{n\cdot(n-1)\ldots(n-r+1)}{r\cdot(r-1)\cdots 1}$$

Antall uordnete utvalg

Antall uordnete utvalg uten tilbakelegging

Vi velger n av totalt N objekter. Antall måter det kan gjøres på:

$$\binom{N}{n} = \frac{N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \ldots \cdot (N-n+1)}{n!}$$

$\binom{a}{b}$ betyr 'velg b fra en samling a', og kalles en *binomisk koeffisient*

Examples

- Du skal velge 4 studenter fra en klasse på 18. Hvor mange måter kan du gjøre det på? Svar: $\binom{18}{4} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 3060$ $\frac{18!}{4! \cdot 14!}$
- Lotto: 34 kuler. Hvor mange utvalg av 7 kuler finnes det?

$$\binom{34}{7} = 5379616$$

Binomisk forsøksrekke

En serie identiske og uavhengige forsøk

- Vi gjør et forsøk n ganger
- Hvert forsøk er *uavhengig* av det forrige
- Utfallet i et forsøk er enten *vellykket* eller *mislykket*
- Utfallet er vellykket med sannsynlighet p, og mislykket med sannsynlighet $1 - p$.

Example

- Du kaster kron/mynt 5 ganger
- 'kron' $\leftrightarrow$ vellykket/suksess
- 'mynt' $\leftrightarrow$ mislykket/failure
- binomisk forsøksrekke med $n = 5$ og $p = 0.5$

Antall '6'ere på ti terningkast

- suksess $\leftrightarrow$ '6 på terningen'
- binomisk forsøksrekke med $n = 10$ og $p = 1/6$

Hvor sannsynlig er det å få akkurat tre 6'ere?

- Sannsynligheten for at de tre første blir '6', og deretter ingen:

$$\underbrace{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}}_{3}\cdot\underbrace{\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}}_{7} = (\frac{1}{6})^3 \cdot (\frac{5}{6})^7 = 0.0013$$

- Antall plasseringer av tre 6'ere i rekka:

$$\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} = \binom{10}{3} = 120$$

- Så sannsynligheten for nøyaktig tre 6'ere er

$$P(3) = \underbrace{\binom{10}{3}}_{\text{antall måter}} \cdot (\frac{1}{6})^3 \cdot (\frac{5}{6})^7 = 0.155$$

Eks: 2 5'ere på 10 kast

Binomisk, $n=10$, $p=1/6$

$$p(2) = \binom{10}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^8$$

$$= \frac{10\cdot 9}{2\cdot 1}\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^8$$

$$\cong 45 \cdot 0.0065$$

$$\cong \underline{\underline{0.29}}$$

Ca 29% sannsynlighet for 2 5'-ere på 10 kast